Soluzioni 3-AM4

Laura Di Gregorio

11 ottobre 2004

Diamo prima dei cenni sulla scrittura di un numero $x \in [0,1]$ in base 3. Risulta che per ogni $x \in [0,1]$ esiste una successione $\{x_h\}_{h\in\mathbb{N}^+}$, $x_h = 0,1,2$ tale che

$$x = \sum_{h\geq 1} \frac{x_h}{3^h} \,.$$

Notiamo che tale scrittura è unica a parte il caso speciale in cui due differenti successioni $\{x_h\}_{h\in\mathbb{N}^+}$, $x_h = 0,1,2$ e $\{\tilde{x}_h\}_{h\in\mathbb{N}^+}$, $\tilde{x}_h = 0,1,2$ danno luogo allo stesso numero

$$x = \sum_{h\geq 1} \frac{x_h}{3^h} = \sum_{h\geq 1} \frac{\tilde{x}_h}{3^h} \,;$$

questo si verifica solo se esiste $n \geq 1$ tale che $x_h = \tilde{x}_h$ $\forall h < n$ e[1] (i) $x_n = 0$, $x_h \equiv 2$ $\forall h > n$ e $\tilde{x}_n = 1$, $\tilde{x}_h \equiv 0$ $\forall h > n$, oppure (ii) $x_n = 1$, $x_h \equiv 2$ $\forall h > n$ e $\tilde{x}_n = 2$, $\tilde{x}_h \equiv 0$ $\forall h > n$.
Facciamo dapprima alcune considerazioni preliminari sull'insieme di Cantor C. Risulta che

$$C = \left\{ \sum_{h\geq 1} \frac{x_h}{3^h} \,, \quad \text{con} \quad x_h = 0,2 \right\}. \tag{1}$$

Infatti se $A = [0,1] \setminus C$ e

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} \;&:=\; \left\{ \frac{1}{3^n} + \sum_{h\geq 1}^{n-1} \frac{x_h}{3^h},\ n \geq 1,\ \ x_h = 0,2 \right\} \\
&=\; \left\{ \sum_{h\geq 1} \frac{x_h}{3^h},\ \exists\, n \geq 1 \ \text{ t.c. } x_n = 0,\ x_h = 0,2\ \forall\, h < n,\ x_h \equiv 2\ \forall\, h > n \right\},
\end{aligned}$$

definendo per ogni

$$x = \frac{1}{3^n} + \sum_{h\geq 1}^{n-1} \frac{x_h}{3^h} = \sum_{h\geq 1}^{n-1} \frac{x_h}{3^h} + \sum_{h>n} \frac{2}{3^h} \in \mathcal{D}$$

[1] Si tenga a mente che

$$\sum_{h>n} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^n}\,, \qquad \frac{1}{3^n} + \sum_{h>n} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^n}$$

l'intervallo aperto

$$\mathcal{I}_x := \Big(x, x+\frac{1}{3^n}\Big) = \Big\{x+\sum_{h>n}\frac{x_h}{3^h}\,, \quad x_h = 0,1,2\,,\ x_h \not\equiv 0\,,\ x_h \not\equiv 2\ \forall\, h>n\Big\}\,,$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} A &= \bigsqcup_{x\in\mathcal{D}} \mathcal{I}_x \\ &= \Big\{\sum_{h\ge 1}\frac{x_h}{3^h}\,,\ x_h = 0,1,2\,,\quad \exists\, n\ge 1,\ \text{con } x_n = 1, \\ &\qquad\qquad x_h \neq 1\ \forall\, h<n,\ x_h \not\equiv 0\,,\quad x_h \not\equiv 2\ \ \forall\, h>n\Big\}\,. \end{aligned}$$

Da cui, essendo

$$[0,1] = \Big\{\sum_{h\ge 1}\frac{x_h}{3^h}\,,\quad \text{con}\quad x_h = 0,1,2\Big\}\,,$$

la (1) segue. Inoltre osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \bigcup_{k\ge 1}\partial C_k = \Big(\bigcup_{x\in\mathcal{D}}\partial\mathcal{I}_x\Big) \cup \{0,1\}. \\ &= \Big\{\sum_{h\ge 1}\frac{x_h}{3^h},\ x_h = 0,2\,, \exists\, n\ge 1\ \ \text{t.c.}\ \ x_h \equiv 0 \text{ o } x_h \equiv 2\ \forall\, h>n\Big\}\,. \end{aligned}$$

Risulta $\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \subset C$. In base a quanto detto finora, vediamo come si scrive la funzione di Cantor. Se $x \in A$ esiste $n \ge 1$ tale che $x_h = 0,2$ per ogni $1 \le h < n$ e $x_n = 1$ allora definiamo

$$f(x) := \sum_{h=1}^{n-1}\frac{x_h}{2^{h+1}} + \frac{1}{2^n}\,.$$

Definiamo $f(x)$ per $x \in \mathcal{D}$ cioè

$$x = \sum_{h=1}^{n-1}\frac{x_h}{3^h} + \frac{1}{3^n}\ \text{ con }\ x_h = 0,2$$

come

$$f(x) := \sum_{h=1}^{n-1}\frac{x_h}{2^{h+1}} + \frac{1}{2^n}\,.$$

Osserviamo che $\mathcal{D} \subset C$ è denso in C. Infatti, dalla caratterizzazione di C data in (1) per ogni $x \in C$, $x = \sum_{h\ge 1}\frac{x_h}{3^h}$, $x_h = 0,2$ la successione $x^{(n)}$ definita come

$$x^{(n)} := \sum_{h=1}^{n-1}\frac{x_h}{3^h} + \frac{1}{3^n} \in \mathcal{D}$$

converge a x. Definiamo f su C. Siano $x \in C$ e $x^{(n)} \in \mathcal{D}$, $x^{(n)} \to x$, come sopra. Siccome vogliamo f continua deve essere $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = \sum_{h\geq 1} \frac{x_h}{2^{h+1}}$. Ricapitolando, per ogni $x \in [0,1]$, $x = \sum_{h\geq 1} \frac{x_h}{3^h}$, $x_h = 0,1,2$

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{h=1}^{n-1} \frac{x_h}{2^{h+1}} + \frac{1}{2^n}, & \text{se } x_n = 1 \text{ e } x_h = 0,2\ \forall\, h < n\ ; \\ \sum_{h\geq 1} \frac{x_h}{2^{h+1}}, & \text{se } x_h = 0,2\ \forall\, h. \end{cases}$$

1. (i) Essendo C chiuso per definizione si ha che $\bar{C} = C = \operatorname{Int} C \bigsqcup \partial C$. Basta dimostrare che $\operatorname{Int} C = \emptyset$. Si supponga per assurdo che esiste un intervallo aperto $I = (a,b)$ tale che $I \subseteq C$. Sia ora $x = \sum_{h\geq 1} \frac{x_h}{3^h}$, $x_h = 0,2$ $x \in I$. Sia $\delta := \min\{b-x, x-a\}$ e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{h\geq n} 3^{-h} < \delta$. Definiamo $\tilde{x} = \sum_{h\geq 1} \frac{\tilde{x}_h}{3^h}$ dove $\tilde{x}_h = x_h$ $\forall h < n$ e $\tilde{x}_h \equiv 1$ se $h \geq n$. E' chiaro che $\tilde{x} \in I$ perché $|\tilde{x} - x| < \delta$ ma $\tilde{x} \notin C$.
Dimostriamo ora che $\partial A = C$. Infatti $\operatorname{Int} A = A$, $\bar{A} = [0,1] \setminus \operatorname{Int} C = [0,1]$ e quindi $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{Int} A = [0,1] \setminus A = C$.
(ii) Un insieme denso numerabile è $\mathcal{D}$.

2. Basta osservare che f è costante sugli intervalli chiusi $\overline{\mathcal{I}_x}$. Essendo $\partial \mathcal{I}_x \subset C$ segue che f non può essere iniettiva su C.

3. Siano $y, z \in C \setminus \mathcal{F}$ tali che $y < z$

$$y := \sum_{h\geq 1} \frac{y_h}{3^h} \quad \text{e} \quad z := \sum_{h\geq 1} \frac{z_h}{3^h}\,.$$

Esiste h_0 tale che $y_{h_0} = 0$ e $z_{h_0} = 2$ e $y_h = z_h$ per ogni $h < h_0$. Allora

$$f(z) - f(y) = \frac{1}{2^{h_0}} + \sum_{h>h_0} \frac{z_h - y_h}{2^{h+1}} > 0\,,$$

infatti $y_h \not\equiv 2$ e $z_h \not\equiv 0$ perché $y, z \in C \setminus \mathcal{F}$.