# *Soluzioni 12-AM4*

*Laura Di Gregorio*

13 dicembre 2004

## Esercizio

Trasformando secondo Fourier otteniamo

$$\begin{cases} \hat{u}_t + \xi^2 \hat{u} = 0 \\ \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\,. \end{cases}$$

Dall'equazione di prim'ordine

$$\hat{u}_t + \xi^2 \hat{u} = 0$$

segue che

$$\hat{u}(\xi,t) = A\, e^{-\xi^2 t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$A = \hat{u}_0(\xi)$$

da cui segue la soluzione

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}\hat{u}_0(\xi).$$

Definiamo il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Dalla definizione di trasformata di Fourier e di prodotto di convoluzione segue immediatamente la proprietà delle funzioni integrabili

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Se pensiamo $e^{-\xi^2 t}$ come la trasformata di una certa funzione, si ottiene che la soluzione è l'antitrasformata di un prodotto di convoluzione.

Dunque basta calcolare l'antitrasformata di $e^{-\xi^2 t}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi - t\xi^2} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{t}\xi - \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\,,\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza ho fatto il cambio di variabile

$$\sqrt{t}\xi - \frac{ix}{2\sqrt{t}} = z$$

e ho usato il fatto che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\, dz = \sqrt{\pi}\,.$$

Dalle considerazioni fatte in precedenza, segue che

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy$$

è la soluzione dell'equazione del calore in $\mathbb{R}$.