Soluzioni 10-AM4

Laura Di Gregorio

29 novembre 2004

1) Cerco una soluzione $u(x,t) = v(\ln x, t) := v(y,t)$ per cui $x^2 u_{xx} = v_{yy} - v_y$ e l'equazione che soddisfa $v(y,t)$ è lineare

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{yy} + v_y = 0 \qquad 1 < x < e^{\pi}\,, \qquad t > 0 \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \\ v(y,0) = \varphi(y) = e^{\frac{1}{2}y} \sin^3 y \\ v_t(y,0) = 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Supponiamo di cercare una soluzione del tipo $v(y,t) = \alpha(t)V(y)$, cioè usando la separazione delle variabili. Nell'equazione otteniamo, omettendo l'argomento delle funzioni,

$$\alpha_{tt} V - \alpha V_{yy} + \alpha V_y = 0$$

e, dividendo per α,

$$V_{yy} - V_y = \frac{\alpha_{tt}}{\alpha} V\,.$$

Dunque, tenendo conto del fatto che α è una funzione indipendente da y, ottengo un'equazione del tipo

$$\begin{cases} -V_{yy} + V_y = \lambda V \\ V(0) = V(\pi) = 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

con $\lambda = -\alpha_{tt}/\alpha$. Osserviamo che quanto detto è equivalente a cercare le autofunzioni dell'operatore $V \to (-\partial_{yy} + \partial_y)V$ con dati al bordo $V(0) = V(\pi) = 0$. Le soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti (2) sono della forma

$$V(y) = e^{\frac{1}{2}y} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}\, y \right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}\, y \right) \right]\,,$$

e imponendo le condizioni al bordo segue che $A = 0$ e $\sqrt{4\lambda - 1} = 2k\pi$ per $k \in \mathbb{N}$. Dunque risulta $\lambda =: \lambda_k = k^2 + 1/4$ e le autofunzioni sono

$$V(y) =: V_k(y) = e^{\frac{1}{2}y} \sin ky\,.$$

Cerchiamo una soluzione del problema (1) della forma

$$v(y,t) = \sum_{k \geq 1} V_k(y) \alpha_k(t)\,,$$

dove gli $\alpha_k(t)$ sono opportuni coefficienti che ora discutiamo. Sostituendo si ottiene l'equazione che devono soddisfare i coefficienti α_k:

$$\ddot{\alpha}_k + \lambda_k \alpha_k = 0\,.$$

Si ha che

$$\alpha_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k} t\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha che $\alpha_k(0) = A_k = c_k$ e $\dot{\alpha}_k(0) = B_k = 0$ dove c_k sono i coefficienti di Fourier della funzione $\varphi(y)$. Dunque

$$v(y,t) = \sum_{k \geq 1} A_k \cos\sqrt{\lambda_k} t\, V_k(y)\,.$$

Scrivendo

$$\sin^3 y = \frac{3}{4}\sin y - \frac{1}{4}\sin 3y$$

segue che $c_1 = 3/4$, $c_3 = -1/4$ e $c_k = 0$ per $k \neq 1, 3$ dunque la soluzione è

$$v(y,t) = \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\,t\right) e^{\frac{1}{2}y}\sin y - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\,t\right) e^{\frac{1}{2}y}\sin 3y$$

e in termini di x

$$u(x,t) = \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\,t\right)\sqrt{x}\sin(\ln x) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\,t\right)\sqrt{x}\sin(3\ln x)\,.$$