Soluzioni 1-AM4

Laura Di Gregorio

27 settembre 2004

1. Sia $A \subseteq E$. A è misurabile secondo Peano-Jordan $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\chi_A \in \mathcal{R}(E)$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ esistono f_1 e f_2 funzioni semplici su E tali che $f_1(x) \leq \chi_A(x) \leq f_2(x)$ su E e $\int_E (f_2 - f_1) \leq \varepsilon$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ esistono $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$ elementari tali che $\text{mis}(E_2 \setminus E_1) \leq \varepsilon$. Dimostriamo l'ultima equivalenza.
($\Rightarrow$) Possiamo assumere che $f_1 = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$ e $f_2 = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{A_j}$, A_j disgiunti. Definisco $\tilde{a}_j, \tilde{b}_j \in \{0,1\}$ tali che $\tilde{a}_j = 0$ se $a_j \leq 0$ e $\tilde{a}_j = 1$ se $a_j > 0$ e $\tilde{b}_j = 0$ se $b_j < 1$ e $\tilde{b}_j = 1$ se $b_j \geq 1$. Considero $\tilde{f}_1 = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j \chi_{A_j}$ e $\tilde{f}_2 = \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j \chi_{A_j}$. Vale che $f_1(x) \leq \tilde{f}_1(x) \leq \chi_A(x) \leq f_2(x) \leq \tilde{f}_2(x)$. Si definisca

$$E_1 := \bigsqcup_{\{j\,:\,\tilde{a}_j = 1\}} A_j \qquad\qquad E_2 := \bigsqcup_{\{j\,:\,\tilde{b}_j = 1\}} A_j\,.$$

Segue che $\tilde{f}_1 = \chi_{E_1}$ e $\tilde{f}_2 = \chi_{E_2}$. Dunque

$$\tilde{f}_1(x) \leq \chi_A(x) \leq \tilde{f}_2(x) \Leftrightarrow \chi_{E_1} \leq \chi_A \leq \chi_{E_2} \Leftrightarrow E_1 \subseteq A \subseteq E_2\,.$$

Inoltre

$$\text{mis}(E_2 \setminus E_1) = \int (\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1) \leq \varepsilon\,.$$

($\Leftarrow$) $E_1 \subseteq A \subseteq E_2 \Rightarrow \chi_{E_1} \leq \chi_A \leq \chi_{E_2}$ e $\text{mis}(E_2 \setminus E_1) = \int (\chi_{E_2} - \chi_{E_1})$.

2. (i) Sia $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Sia $x_k \to x$. Se $x_k \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $f(x_k) = 0$; se $x_k = m_k/n_k \in \mathbb{Q}$ allora deve essere $n_k \to \infty$ per $k \to \infty$. Dunque f è continua su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sia $x = m/n \in \mathbb{Q}$ allora $f(x) = 1/n$ e f è discontinua perché basta prendere una successione $x_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $x_k \to x$.
(ii) Fisso $\bar{n}$. Considero l'insieme $Q_{\bar{n}} := \{m/n \ : \ m \leq n \leq \bar{n}\}$. Risulta

$$\sharp Q_{\bar{n}} \leq \sum_{n=1}^{\bar{n}} n = \frac{\bar{n}(\bar{n}+1)}{2}.$$

Sia $I_q := \left[q - \frac{1}{2\bar{n}^3}, q + \frac{1}{2\bar{n}^3}\right]$. Si prenda $f_1 \equiv 0$ e

$$f_2 = \frac{1}{\bar{n}} + \sum_{q \in Q_{\bar{n}}} \chi_{I_q}.$$

Si ha

$$\int_0^1 (f_2 - f_1) \leq \frac{1}{\bar{n}} + \sum_{q \in Q_{\bar{n}}} \frac{1}{\bar{n}^3} \leq \frac{1}{\bar{n}} + \frac{\bar{n}(\bar{n}+1)}{2\bar{n}^3} \leq \varepsilon$$

per $\bar{n}$ sufficientemente grande.