Prova scritta di AM4 del 17/1/2005 – (II Esonero)

- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**

1) Sia f la funzione 2π–periodica che vale 1 su $[0,\pi)$ e 0 su $(\pi, 2p)$.
(i) Calcolare la serie di Fourier di f.
(ii) Calcolare $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2}$.

2) Discutere la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \ , & t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \\ u(0,x) = \chi_{(-1,1)}(x) \ . \end{cases}$$

3) Sia $\{r_j\} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ una numerazione dei razionali in $(0,1)$; sia I_j l'intervallo aperto di centro r_j e lunghezza $1/4^j$; sia $\varphi_j \in C_0^\infty(I_j)$ una funzione non negativa a supporto compatto contenuto in I_j con massimo in r_j dove vale j; infine, sia $A := \bigcup_{j\geq 1} I_j$. Dimostrare o confutare che $f := \sum_{j\geq 1} \varphi_j \in \mathcal{R}_1(A)$

4) Enunciare e dimostrare il lemma di Riemann–Lebesgue per funzioni $\mathcal{R}_1(\mathbb{R})$.

5) Enunciare e dimostrare il teorema sull'inversione della trasformata di Fourier per funzioni $C_0^2(\mathbb{R})$

6) (i) Dare a definizione di $\mathcal{R}(E)$ e $\mathcal{R}_1(E)$.
(ii) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Peano–Jordan. Dimostrare che se $f \in \mathcal{R}_1(E)$ ed è limitata allora $f \in \mathcal{R}(E)$.