

Prova scritta di AM4 del 3/11/2004 – (I Esonero)

- Motivare il lavoro svolto.
- Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.

- 1) Dare la definizione di integrale di Riemann. Dimostrare (usando direttamente la definizione data) che le funzioni integrabili secondo Riemann formano uno spazio vettoriale.
- 2) Dimostrare che un compatto di misura nulla è misurabile secondo Peano–Jordan ed ha misura zero.
- 3) (i) Dimostrare che un aperto misurabile secondo Peano–Jordan ha misura positiva.
(ii) Costruire un insieme aperto $A \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x^3 < y < x^2\}$ non misurabile secondo Peano–Jordan (dimostrare le affermazioni fatte).
- 4) (i) Dimostrare che $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = 1\}$ è un insieme di misura nulla ($|\cdot|$ = norma euclidea).
(ii) Dimostrare che $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = 1\}$ è un insieme di misura nulla per ogni norma $\|\cdot\|$ su \mathbb{R}^n .
- 5) Enunciare il teorema di Vitali–Lebesgue. Dimostrare che una funzione limitata con insieme di discontinuità di misura nulla è integrabile secondo Riemann.
- 6) Definire l'insieme ternario di Cantor C ; enunciarne le proprietà fondamentali; dimostrare che C non ha punti isolati.