AM3 - Tutorato VII

Integrazione su insiemi normali

Mercoledì 21 aprile 2004

Definizione 1. $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice **insieme normale** rispetto all'asse delle y se esistono α e $\beta \in C([a,b],\mathbb{R})$ tali che $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ e risulti

$$A = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : y \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$$

Proposizione 1. Sia A un sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ normale rispetto all'asse delle y e sia $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Allora A è misurabile secondo Peano-Jordan; f è integrabile su A; la funzione

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$$

è continua su $[a,b]$ e

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Esercizio 1. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1,\ -1 \leq y \leq x^3\}$ calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_A xy^2\,dx\,dy$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_B xy\,dx\,dy$$

dove $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\}$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_C x^3 e^y\,dx\,dy$$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq -x^2 + 3,\ x \geq 0\}$

Esercizio 4. Sia $a > 1$ calcolare l'area della regione di $\mathbb{R}^2$ delimitata dalle rette ax ed $\frac{x}{a}$ e dalla parabola di equazione a^2x^2. Per quali valori di a quest'area è massima?