AM3 - Tutorato VIII

SOLUZIONI

mercoledì 28 aprile 2004

Soluzione esercizio 1. Per calcolare l'integrale doppio assegnato cerchiamo anzitutto di scrivere il dominio di integrazione A come insieme normale rispetto all'asse delle y. L'intersezione tra le due funzioni $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ e $\beta(x) = x^2$ è chiaramente il punto $(1, 1)$, dunque risulta:

$$A = \{(x, y) \in [1, 2] \times \mathbb{R} : \ \frac{1}{x} \leq y \leq x^2\}$$

Applicando allora il teorema per l'integrazione su insiemi normali di $\mathbb{R}^2$ (cfr. tutorato VII) abbiamo:

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{x}{y^3}\, dx\, dy &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{x}{y^3}\, dy \right) dx = \int_1^2 x \left[-\frac{1}{2y^2} \right]_{\frac{1}{x}}^{x^2} dx = \\
&= \int_1^2 x \left(-\frac{1}{2x^4} + \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_1^2 \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3}\, dx = \\
&= \left[\frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \right]_1^2 = \left(2 + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{27}{16}
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2. Osserviamo da principio che il dominio d'integrazione D non è un insieme normale rispetto a nessuno dei due assi. Un modo di procedere del tutto leggittimo potrebbe essere allora quello di scrivere D come uniuone di due insiemi normali con interno disgiunto. Si lascia allo studente come utile esercizio il compito di calcolare in questa maniera l'integrale assegnato. Alternativamente si può procedere, ed è quello che faremo, scrivendo D come differenza di due insiemi normali; esplicitando come funzioni della variabile x le equazioni dei quarti di circonferenza di raggio 1 e 2, prendiamo

$$D_1 = \{(x, y) \in [0, 2] \times \mathbb{R} : \ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : \ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

e risulta allora $D = D_1 \setminus D_2$. Sfruttando l'additività dell'integrale di Riemann abbiamo:

$$\begin{aligned}
\iint_D x\,dx\,dy &= \iint_{D_1} x\,dx\,dy - \iint_{D_2} x\,dx\,dy = \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\,dy \right) dx - \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy \right) dx = \\
&= \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \\
&= \left[-\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Osservazione 1. Quest' integrale può essere anche calcolato parametrizzando il dominio D in coordinate polari ($x = \rho\cos\theta$ ed $y = \rho\sin\theta$). Si consiglia di procedere anche in questo ulteriore modo, verificando con lo svolgimento dell'esercizio l'utilità del passaggio a coordinate polari per domini a simmetria sferica.

Soluzione esercizio 3. Per il calcolo di integrali in $\mathbb{R}^3$ procediamo in maniera analoga a quello che si è fatto per gli integrali doppi; cerchiamo di scrivere dunque il dominio B come insieme normale rispetto all'asse delle z. A tal fine dobbiamo trovare due funzioni $\alpha(x,y)$ e $\beta(x,y)$, definite su uno stesso dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tali che risulti

$$B = \{(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R} : \ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

Essendo B la regione di $\mathbb{R}^3$ delimitata dalla sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ e dal cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ risulta chiaro che $\alpha(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\beta(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Per trovare il dominio Ω di queste due funzioni calcoliamo (in maniera del tutto analoga al caso di integrali in $\mathbb{R}^2$) i punti in cui s'intersecano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima otteniamo $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, che è l'equazione di una circonferenza di raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$. L' integrale triplo assegnato può esserre adesso ridotto ad un integrale di due variabili :

$$\begin{aligned}
\iiint_B z\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy\,dz &= \iint_\Omega \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz \right) \left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy = \\
&= \iint_\Omega \left(x^2+y^2\right) \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy = \\
&= \frac{1}{2} \iint_\Omega \left(1-2x^2-2y^2\right)\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

dove con Ω abbiamo indicato il cerchio di raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ centrato nell' origine. A questo punto risulta utile, data la conformazione del dominio ed anche la particolare forma della funzione integranda, il passaggio a coordinate polari. Sia

$$\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

e sia

$$A = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

risulta

$$\Phi(A) = \Omega$$

Al fine di utilizzare il teorema del cambio di variabili osserviamo che Φ verifica le ipotesi di differenziabilità , di limitatezza e di iniettività nell'interno di A. La matrice Jacobiana della trasformazione è:

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

dunque

$$|\det(J_\Phi)| = \rho$$

ed è sempre $\neq 0$ nell'interno di A.
Applichiamo allora il teorema all'integrale precedentemente ottenuto

$$\begin{aligned} \iiint_B z\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy\, dz &= \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(1-2x^2-2y^2\right)\left(x^2+y^2\right)\, d\rho\, d\theta = \\ &= \frac{1}{2}\iint_A \left(1-2\rho^2\right)\rho^3\, d\rho\, d\theta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 - 2\rho^5\, d\theta\right) d\rho = \\ &= \pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho^3 - 2\rho^5\, d\rho = \pi\left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{48} \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4. Il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,-1)$ è :

$$T = \{(x,y)\mathbb{R}^2 : \, x \geq 0, \, y \leq 0, \, x - y \leq 1\}$$

Vogliamo appllicare, come suggerito dalla particolare forma della funzione, il cambio di variabili $u = x + y$ e $v = x - y$. Dobbiamo allora trovare la trasformazione Φ che esprima le variabili x ed y come funzioni delle nuove variabili u e v ed individuare quale sottinsieme A di $\mathbb{R}^2$ viene mandato in T tramite la Φ. Dalle equazioni

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

otteniamo sommando e sottraendo, rispettivamente, la seconda equazione alla prima e dividendo per 2

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Sia allora $\Phi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$, Φ è differenziabile, limitata e iniettiva e

$$|\det(J_\Phi)| = \frac{1}{2} \qquad \forall\,(u,v)\ \in \mathbb{R}^2$$

Per poter applicare il teorema del cambio di variabili, resta allora da individuare l'insieme A tale che $\Phi(A) = T$. Dalle tre disequazioni che descrivono T otteniamo, andando a sostituire ad x ed y le rispettive espressioni in u e v, altrettante disequazioni che descrivono A:

$$\begin{cases} x \geq 0 & \Rightarrow \quad \frac{u+v}{2} \geq 0 & \Rightarrow \quad u \geq -v \\ y \leq 0 & \Rightarrow \quad \frac{u-v}{2} \leq 0 & \Rightarrow \quad u \leq v \\ x - y \leq 1 & \Rightarrow \quad v \leq 1 & \end{cases}$$

Allora

$$A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ -v \leq u \leq v,\ v \leq 1\} = \{(u,v) \in \mathbb{R} \times [0,1] :\ -v \leq u \leq v\}$$

e risulta:

$$\begin{aligned} \iint_T \exp\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\,dx\,dy &= \frac{1}{2}\iint_A \exp\left(\frac{u}{v}\right)\,du\,dv = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{-v}^{v} \exp\left(\frac{u}{v}\right)\,du\right)\,dv = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 v\left[\exp\left(\frac{u}{v}\right)\,du\right]_{-v}^{v}\,dv = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 v\left(e - \frac{1}{e}\right)\,dv = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$