AM3 - Tutorato VII

SOLUZIONI

mercoledì 21 aprile 2004

Osservazione 1. Osserviamo anzitutto che A e B sono insiemi normali rispetto ad entrambe gli assi. C è invece normale rispetto all'asse delle y e può essere scritto come unione di due insiemi normali rispetto all'asse delle x aventi interni disgiunti. La regione di cui viene chiesto il calcolo della misura di Peano-Jordan nell' ultimo esercizio non è invece normale rispetto a nessun asse ma è unione di due insiemi normali (con interni disgiunti) rispetto ad uno qualunque dei due assi.

Soluzione esercizio 1. Per calcolare l'integrale assegnato anzitutto scriviamo A come insieme normale rispetto all'asse delle y (dal momento che la scrittura di A così come fornita dal testo non coincide con la definizione di insieme normale). É però immediata la verifica (eventualmente disegnando A nel piano cartesiano) del fatto che

$$A = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} :\ -1 \leq y \leq x^3\}$$

Allora utilizzando il teorema dell'integrazione su insiemi normali con $\alpha(x) = -1$ e $\beta(x) = x^3$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
\iint_A xy^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{x^3} xy^2\,dy \right) dx = \int_{-1}^{1} x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{x^3} dx = \\
&= \int_{-1}^{1} x \left(\frac{x^9}{3} + \frac{1}{3} \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^{10}}{3} + \frac{x}{3}\,dx = \\
&= \left[\frac{x^{11}}{33} + \frac{x^2}{6} \right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{33} + \frac{1}{6} \right) - \left(-\frac{1}{33} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{33}
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2. Scriviamo B come insieme normale rispetto all'asse delle y esplicitando l'equazione della circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$ sul semipiano $\{y \geq 0\}$ e l'equazione della retta $x + y = 1$, entrambe come funzioni della x

$$B = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} :\ 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

Risulta allora applicando il teorema per l'integrazione su insiemi normali:

$$\begin{aligned}\iint_B xy\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right) dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int_0^1 x\left(\frac{1-x^2}{2} - \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx = \int_0^1 x\left(-x^2+x\right) dx = \\ &= \int_0^1 -x^3+x^2\,dx = \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 3. Per riuscire a scrivere C come insieme normale occorre trovare il punto d'intersezione tra le due parabole avente ascissa positiva (dal momento che $C \subset \{x \geq 0\})$. Allora dall'equazione $x^2 = -x^2+3$ otteniamo $2x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (escludendo la soluzione che non ci interessa). Dunque

$$C = \{(x,y) \in \left[0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right] \times \mathbb{R} :\ x^2 \leq y \leq 3-x^2\}$$

e l'integrale è il seguente:

$$\begin{aligned}\iint_C x^3 e^y\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} x^3\left(\int_{x^2}^{3-x^2} e^y\,dy\right) dx = \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} x^3\,[e^y]_{x^2}^{3-x^2}\ dy\,dx\ = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} x^3\left(e^{3-x^2}-e^{x^2}\right) dx = \\ &= e^3\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} x^3 e^{-x^2}\,dx\ - \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} x^3 e^{x^2}\,dx\end{aligned}$$

Risolviamo separatamente (integrando per parti) i due integrali:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} x^3 e^{-x^2}\,dx &= \left[x^2\left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} xe^{-x^2}\,dx = \\ &= -\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{2}} + \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{5}{4}e^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} x^3 e^{x^2}\,dx &= \left[x^2\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} - \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} xe^{x^2}\,dx = \\ &= \frac{3}{4}e^{\frac{3}{2}} - \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Allora in conclusione abbiamo:

$$\begin{aligned}
\iint_C x^3 e^y \, dx\, dy &= e^3 \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} x^3 e^{-x^2}\, dx \, - \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} x^3 e^{x^2}\, dx = \\
&= e^3\left(-\frac{5}{4}e^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\right) = \\
&= -\frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} = \\
&= -\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\left(e^3 - 1\right)
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4. Chiamiano E_a la regione di $\mathbb{R}^2$ delimitata dalle rette ax ed $\frac{x}{a}$ e dalla parabola di equazione a^2x^2. Cerchiamo di capire com' è fatto quest'insieme trovando innanzitutto le intersezioni tra la parabola e le due rette al fine di scrivere E_a come unione di due insieme normali rispetto all'asse delle y. Mettendo a sistema l'equazione della parabola e quella della retta ax otteniamo $a^2x^2 = ax \Rightarrow x = 0$ ed $x = \frac{1}{a}$. L'intersezione con la retta $\frac{x}{a}$ è invece determinata dall'equazione $a^2x^2 = \frac{x}{a}$ che ha come soluzioni 0 ed $\frac{1}{a^3}$. Allora possiamo scrivere $E_a = E_a^{(1)} \cup E_a^{(2)}$ dove

$$E_a^{(1)} = \{(x,y) \in \left[0, \frac{1}{a^3}\right] \times \mathbb{R} : \ \frac{x}{a} \le y \le ax\}$$

$$E_a^{(2)} = \{(x,y) \in \left[\frac{1}{a^3}, \frac{1}{a}\right] \times \mathbb{R} : \ a^2x^2 \le y \le ax\}$$

La misura di E_a è allora la somma delle misure di $E_a^{(1)}$ ed $E_a^{(2)}$ avendo questi due insiemi interno disgiunto:

$$\begin{aligned}
mis_2(E_a) &= \iint_{E_a} dx\, dy = mis_2(E_a^{(1)}) + mis_2(E_a^{(2)}) = \\
&= \iint_{E_a^{(1)}} dx\, dy + \iint_{E_a^{(2)}} dx\, dy = \\
&= \int_0^{\frac{1}{a^3}} \left(\int_{\frac{x}{a}}^{ax} dy\right) dx + \int_{\frac{1}{a^3}}^{\frac{1}{a}} \left(\int_{a^2x^2}^{ax} dy\right) dx = \\
&= \int_0^{\frac{1}{a^3}} \left(ax - \frac{x}{a}\right) dx + \int_{\frac{1}{a^3}}^{\frac{1}{a}} \left(ax - a^2x^2\right) dx = \\
&= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{2a}x^2\right]_0^{\frac{1}{a^3}} + \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{a^2}{3}x^3\right]_{\frac{1}{a^3}}^{\frac{1}{a}} = \\
&= \frac{1}{2a^5} - \frac{1}{2a^7} + \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}\right) - \left(\frac{1}{2a^5} - \frac{1}{3a^7}\right) = \\
&= \frac{1}{6a} - \frac{1}{6a^7} = f(a)
\end{aligned}$$

Abbiamo allora l'area di E_a come funzione della variabile $a \geq 1$. Derivando si ha $f'(a) = \frac{7}{6a^8} - \frac{1}{6a^2}$; adesso $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{6a^8} = \frac{1}{6a^2}$ da cui otteniamo che f ha un unico punto critico in

$$a = \sqrt[6]{7}$$

Questo è ovviamente un massimo avendosi $\lim_{a \to 1} f(a) = \lim_{a \to +\infty} f(a) = 0$ ed essendo $f(a) > 0$ per ogni a (dal momento che $f(a)$ rappresenta un'area).