AM3 - Soluzioni del Tutorato V - Mercoledì 24 marzo 2004 d.C.

1. Tramite separazione di variabili otteniamo

$$\dot{y} = \frac{14x^5 + 12x^4 + 28x^3 + 50x^2 + 67x + 61}{(x^2+3)^2\,(x+2)^2}\, y^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = \int \frac{14x^5 + 12x^4 + 28x^3 + 50x^2 + 67x + 61}{(x^2+3)^2\,(x+2)^2}\, dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -\left(\int \frac{14x^5 + 12x^4 + 28x^3 + 50x^2 + 67x + 61}{(x^2+3)^2\,(x+2)^2}\, dx\right)^{-1} .$$

Ci siamo così ricondotti alla soluzione dell'integrale indefinito che compare al secondo membro. Cerchiamo una scomposizione della funzione razionale integranda in fratti semplici della forma :

$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} + \frac{Ex+F}{(x^2+3)^2}$;

Eguagliando tale espressione alla funzione $\frac{14x^5+12x^4+28x^3+50x^2+67x+61}{(x^2+3)^2\,(x+2)^2}$ otteniamo i valori dei coefficienti :

$A = 3$, $B = -1$, $C = 2$, $D = -1$, $E = 0$, $F = 7$.

Possiamo ora calcolare agevolmente l'integrale :

$$\int \frac{14x^5 + 12x^4 + 28x^3 + 50x^2 + 67x + 61}{(x^2+3)^2\,(x+2)^2}\, dx =$$
$$= \int \frac{3}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2x-1}{x^2+3} + \frac{7}{(x^2+3)^2}\, dx =$$
$$= 3\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + \ln(x^2+3) - \int \frac{dx}{x^2+3} + 7\int \frac{dx}{(x^2+3)^2} .$$

$$\cdot \int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + K .$$

$$\cdot \int \frac{dx}{(x^2+3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3}{(x^2+3)^2}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{3 + x^2 - x^2}{(x^2+3)^2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{3+x^2}{(x^2+3)^2}\, dx - \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{(x^2+3)^2}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{(x^2+3)^2}\, dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+3)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+3)^2}\, x\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2+3}\right) x\, dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+3} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3} .$$

2. Risolvendo per separazione di variabili l'equazione differenziale omogenea associata

   $\dot{y} + e^x y = 0$

   otteniamo la soluzione generale

   $y_0 = Ke^{-e^x}$.

   Applichiamo ora il metodo di variazione della costante cercando una soluzione dell'equazione data della forma $y^* = c(x)e^{-e^x}$.

   $\dot{y^*} + e^x y^* = e^x \cos^2(e^x) \Rightarrow$

   $\Rightarrow c'(x)e^{-e^x} - c(x)e^{-e^x+x} + c(x)e^{-e^x+x} = e^x \cos^2(e^x) \Rightarrow$

   $\Rightarrow c'(x) = e^x \cos^2(e^x)e^{e^x}$.

   Integrando otteniamo

   $$c(x) = \int \cos^2(e^x)e^{e^x}e^x dx \quad ,$$

   ovvero, tramite la sostituzione $t = e^x$,

   $$c(x) = \int \cos^2 te^t \, dt \ .$$

   Utilizzando la formula trigonometrica $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$ abbiamo

   $$\int \cos^2 te^t \, dt = \int \frac{1}{2}e^t \, dt + \int \frac{1}{2}\cos(2t)e^t \, dt =$$

   $$= \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\int \cos(2t)e^t \, dt \ .$$

   $$\int \cos(2t)e^t \, dt = \cos(2t)e^t + 2\int \sin(2t)e^t \, dt =$$

   $$= \cos(2t)e^t + 2\sin(2t)e^t - 4\int \cos(2t)e^t \, dt \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \int \cos(2t)e^t \, dt = \frac{1}{5}e^t(\cos(2t) + 2\sin(2t)) + J \ .$$

   Prendendo $c(x) = \frac{1}{2}e^t \left(1 + \frac{1}{5}(\cos(2t) + 2\sin(2t))\right)$, dove $t = e^x$, abbiamo che la soluzione generale è data da :

   $y = y_0 + y^* = Ke^{-e^x} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5}(\cos(2e^x) + 2\sin(2e^x))\right).$

3. L'equazione omogenea associata ha polinomio caratteristico

   $\lambda^2 - 4\lambda + 29 = (\lambda - 2 + 5i)(\lambda - 2 - 5i)$.

   La sua soluzione generale è quindi

$y_0 = K_1 e^{2x}\sin(5x) + K_2 e^{2x}\cos(5x)$.

Applichiamo il metodo di variazione delle costanti: sia

$y^* = c_1(x)e^{2x}\sin(5x) + c_2(x)e^{2x}\cos(5x)$

una soluzione dell'equazione differenziale data .
Imponendo la condizione aggiuntiva

$c_1'(x)e^{2x}\sin(5x) + c_2'(x)e^{2x}\cos(5x) = 0$

avremo

$$\dot{y^*} = c_1(x)e^{2x}(2\sin(5x) + 5\cos(5x)) + c_2(x)e^{2x}(2\cos(5x) - 5\sin(5x)) =$$
$$= 2y^* + 5e^{2x}(c_1(x)\cos(5x) - c_2(x)\sin(5x))$$

$$\ddot{y^*} = 2\dot{y^*} + 10e^{2x}(c_1(x)\cos(5x) - c_2(x)\sin(5x)) +$$
$$+ 5e^{2x}(c_1'(x)\cos(5x) - 5c_1(x)\sin(5x) - c_2'(x)\sin(5x) - 5c_2(x)\cos(5x)) =$$
$$= 4\dot{y^*} - 29y^* + 5e^{2x}(c_1'(x)\cos(5x) - c_2'(x)\sin(5x))$$

$$\ddot{y^*} - 4\dot{y^*} + 29y^* = 1 \Rightarrow 5e^{2x}(c_1'(x)\cos(5x) - c_2'(x)\sin(5x)) = 1 \ .$$

Consideriamo ora le due condizioni

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(5x) - c_2'(x)\sin(5x) = \frac{1}{5}e^{-2x} & (I) \\ c_1'(x)e^{2x}\sin(5x) + c_2'(x)e^{2x}\cos(5x) = 0 & (II) \end{cases} ;$$

tramite opportune combinazioni lineari otteniamo

$$c_1'(x)\left(\cos(5x) + \frac{\sin^2(5x)}{\cos(5x)}\right) = \frac{1}{5}e^{-2x} \quad (I + II\tan(5x))$$

$$c_2'(x)\left(\cos(5x) + \frac{\sin^2(5x)}{\cos(5x)}\right) = -\frac{1}{5}e^{-2x} \quad (II - I\tan(5x))$$

da cui

$$c_1'(x) = \frac{1}{5}e^{-2x}\cos(5x)$$
$$c_2'(x) = -\frac{1}{5}e^{-2x}\sin(5x)$$

ed integrando due volte per parti determiniamo (a meno di una costante)

$$c_1(x) = \frac{1}{145}e^{-2x}(5\sin(5x) - 2\cos(5x))$$
$$c_2(x) = \frac{1}{145}e^{-2x}(5 - 2\sin(5x)) \quad .$$

La soluzione è dunque

$y = y_0 + y^*$, con

$$y^* = \frac{1}{145}[5(\sin^2(5x)+\cos^2(5x)) - 4\sin(5x)\cos(5x)] = \frac{1}{145}[5 - 4\sin(5x)\cos(5x)]$$

4. Siamo nel caso di un'equazione differenziale di Bernoulli.
L'equazione omogenea associata, risolubile per separazione di variabili, ha soluzione
$y_0 = Ke^{-\frac{1}{2x^2}}$.

Sia $y^* = c(x)e^{-\frac{1}{2x^2}}$ una soluzione dell'equazione data.

$\dot{y^*} = c'(x)e^{-\frac{1}{2x^2}} + \frac{1}{x^3}c(x)e^{-\frac{1}{2x^2}}$.

$\dot{y^*} - \frac{y^*}{x^3} = \frac{e^{\frac{2x+3}{2x^2}}}{3x^2} \ln x \; y^{*4} \Rightarrow c'(x)e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{e^{\frac{2x+3}{2x^2}}}{3x^2} \ln x \; c^4(x)e^{-\frac{2}{x^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{c'(x)}{c^4(x)} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^2} \ln x$.

Integrando otteniamo

$-\frac{1}{3c^3(x)} = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^2} \ln x \, dx = \int \frac{d}{dx}\left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{3}\right) \ln x \, dx =$

$= -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{3} \ln x - \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^2} \frac{1}{x} \, dx$;

tramite la sostituzione $t = \frac{1}{x}$ calcoliamo

$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3} \frac{1}{x} \, dx = -\frac{1}{3} \int e^t t \, dt = -\frac{1}{3}e^t t + \frac{1}{3}e^t$.

Abbiamo dunque :

$\frac{1}{3c(x)} = -\frac{1}{3}\left(e^{\frac{1}{x}} \ln x - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + e^{\frac{1}{x}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow c(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}(\ln x + \frac{1}{x} - 1)\right)^{-\frac{1}{3}}$,

da cui si trova la soluzione $y = y_0 + y^*$.