AM3 - Soluzioni del Tutorato II - Mercoledì 3 marzo 2004 d.C.

1. (a) $x' = \dfrac{t^3+3}{xt^3+xt^2+xt+x} = \dfrac{1}{x}\,\dfrac{t^3+3}{t^3+t^2+t+1} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow x'x = \dfrac{t^3+3}{t^3+t^2+t+1} \;\Rightarrow\; \displaystyle\int x\,dx = \int \frac{t^3+3}{t^3+t^2+t+1}\,dt \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2} = \displaystyle\int \frac{t^3+3}{(t+1)(t^2+1)}\,dt = \int 1 - \frac{t^2+t-2}{(t+1)(t^2+1)}\,dt\,.$

Calcolando l'integrale al secondo membro come visto nella soluzione dell'esercizio 2 (a) del tutorato I , otteniamo:

$\displaystyle\int 1 - \frac{t^2+t-2}{(t+1)(t^2+1)}\,dt = \int 1 + \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} =$

$= \displaystyle\int 1 + \frac{1}{(t+1)} + \frac{-2t+1}{t^2+1}\,dt =$

$= t + \ln|t+1| - \ln(t^2+1) + \arctan(t).$

Abbiamo dunque :

$\dfrac{x^2}{2} = t + \ln|t+1| - \ln(t^2+1) + \arctan(t)\,,$

da cui si esplicita la soluzione :

$x = \pm\sqrt{2(t + \ln|t+1| - \ln(t^2+1) + \arctan(t))}\,.$

(b) $y' = \dfrac{(y^2+3)(2+\sqrt[3]{x+1})}{1+\sqrt{x+1}} \Rightarrow \dfrac{y'}{y^2+3} = \dfrac{2+\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2+3} = \int \frac{2+\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx.$

L'integrale al primo membro è dato da :

$\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{dy}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right) + K.$

Tramite la sostituzione $x+1 = t^6$ ($\Rightarrow dx = 6t^5\,dt$) , calcoliamo l'integrale al secondo membro:

$$\int \frac{2+\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{2+t^2}{1+t^3}\,6t^5\,dt = \int 6t^4+12t^2-6t+\frac{-12t^2+6t}{t^3+1}\,dt =$$
$$= \frac{6}{5}t^5+4t^3-3t^2+\int \frac{-6}{t+1}+\frac{-6t+6}{t^2-t+1}\,dt =$$
$$= \frac{6}{5}t^5+4t^3-3t^2-6\ln|t+1|+\int -3\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{3}{t^2-t+1}\,dt =$$
$$= \frac{6}{5}t^5+4t^3-3t^2-6\ln|t+1|-3\ln(t^2-t+1)+$$
$$+2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+H.$$

Abbiamo dunque:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6}{5}t^5+4t^3-3t^2-6\ln|t+1|-3\ln(t^2-t+1)+$$
$$+2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C \;\Rightarrow y=\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}t^5+4t^3-3t^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-6\ln|t+1|-3\ln(t^2-t+1)+2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C\right)\right).$$

(c) $x' = \dfrac{t^2+\sqrt{7}\,t}{\sqrt{3-2x-x^2}} \;\Rightarrow x'\sqrt{3-2x-x^2} = t^2+\sqrt{7}\,t \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int t^2+\sqrt{7}t\,dt \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \frac{t^3}{3}+\frac{\sqrt{7}\,t^2}{2}+K.$$

Calcoliamo l'integrale al primo membro:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(1+x)^2}\,dx = 2\int \sqrt{1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^2}\,dx\,;$$

applicando la sostituzione $\frac{1+x}{2} = \sin t$, otteniamo:

$$2\int \sqrt{1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^2}\,dx = 2\int \sqrt{1-\sin^2 t}\,2\cos t\,dt = 4\int cos^2 t\,dt =$$
$$= 2t+2\sin t\cos t = 2\arcsin\left(\frac{1+x}{2}\right)+\frac{(1+x)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}+H.$$

La soluzione, sotto forma di integrale generale, è :

$$2\arcsin\left(\frac{1+x}{2}\right)+\frac{(1+x)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}=\frac{t^3}{3}+\frac{\sqrt{7}\,t^2}{2}+C\,.$$

(d) $y'=\cos(\ln x)e^{-y}\ \Rightarrow\ y'e^{-y}=\cos(\ln x)\ \Rightarrow\ \int e^{-y}\,dy=\int\cos(\ln x)\,dx\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ -e^{-y}=\frac{1}{2}x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=-\ln\left(-\frac{1}{2}x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C\right)\ ,$$

dove si è calcolato per sostituzione, ponendo $x=e^t$,

$\int\cos(\ln x)\,dx=\int\cos t e^t\,dt$ e poi per parti,

$$\int\cos t e^t\,dt=e^t\cos t+\int e^t\sin t\,dt=e^t\cos t+e^t\sin t-\int e^t\cos t\,dt$$

da cui segue

$\int e^t\cos t\,dt=\frac{e^t}{2}(\cos t+\sin t)+H$, ovvero

$$\int\cos(\ln x)\,dx=\frac{1}{2}x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C\,.$$

2. Verifichiamo innanzitutto che le funzioni $||A||_\infty$ e $||A||_\infty^\infty$ sono norme su $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n\times m)$.

- $||A||_\infty=0\ \Rightarrow\sup_{i,j}|a_{ij}|=0\ \Rightarrow a_{ij}=0\ \forall i\le n\,,j\le m\ \Rightarrow$

  $\Rightarrow A=0\in\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n\times m)\,;$

  $||kA||_\infty=\sup_{i,j}|ka_{ij}|=k\sup_{i,j}|a_{ij}|=k||A||_\infty\,;$

  $||A+B||_\infty=\sup_{i,j}|a_{ij}|+|b_{ij}|\le\sup_{i,j}|a_{ij}|+\sup_{i,j}|b_{ij}|=||A||_\infty+||B||_\infty\,.$

- $||A||_\infty^\infty=0\ \Rightarrow\sup_{||x||_\infty=1}||Ax||_\infty=0\ \Rightarrow$

  $\Rightarrow||Ax||_\infty=0\ \forall x$ t.c. $||x||_\infty=1\ \Rightarrow A=0\in\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n\times m)\,;$

  $||kA||_\infty^\infty=\sup_{||x||_\infty=1}||kAx||_\infty=\sup_{||x||_\infty=1}k||Ax||_\infty=$

  $=k\sup_{||x||_\infty=1}||Ax||_\infty=k||A||_\infty^\infty\,;$

$$
\begin{aligned}
&||A+B||_\infty^\infty = \sup_{||x||_\infty=1} ||(A+B)x||_\infty = \sup_{||x||_\infty=1} ||Ax+Bx||_\infty \leq \\
&\leq \sup_{||x||_\infty=1} (||Ax||_\infty + ||Bx||_\infty) \leq \sup_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty + \sup_{||x||_\infty=1} ||Bx||_\infty = \\
&= ||A||_\infty^\infty + ||B||_\infty^\infty .
\end{aligned}
$$

Mostriamo che le norme $||A||_\infty^\infty$ e $||A||_\infty$ sono equivalenti facendo vedere che esistono due costanti $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che
$k_1||A||_\infty \leq ||A||_\infty^\infty \leq k_2||A||_\infty \; \forall A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times m)$.

- $||A||_\infty \leq ||A||_\infty^\infty \quad [k_1 = 1]$,
  infatti $\exists i^*, j^*$ t.c. $||A||_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij}| = |a_{i^*j^*}|$;
  considerando il vettore $x^{j^*} = (x_1^{j^*} , x_2^{j^*} , \ldots , x_m^{j^*}) \in \mathbb{R}^m$
  con $x_i^{j^*} := \delta_{i,j^*}$[1] (si noti che $||x^{j^*}||_\infty = 1$) , abbiamo che

$$
\begin{aligned}
||A||_\infty &= \sup_{i,j} |a_{ij}| = |a_{i^*j^*}| = \\
&= ||(a_{1j^*} , a_{2j^*} , \ldots , a_{mj^*})||_\infty = ||Ax^{j^*}||_\infty \leq \\
&\leq \sup_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty = ||A||_\infty^\infty .
\end{aligned}
$$

- $||A||_\infty^\infty \leq m||A||_\infty \quad [k_2 = m]$,
  infatti $\forall x = (x_1 , x_2 , \ldots , x_m) \in \mathbb{R}^m, ||x||_\infty = 1$
  $\Rightarrow |x_i| \leq 1 \; \forall i = 1, \ldots , m$.
  Avremo dunque:

$$
\begin{aligned}
||Ax||_\infty &= ||(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m , \ldots , a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m)||_\infty \leq \\
&\leq ||(|a_{11}||x_1| + \cdots + |a_{1m}||x_m| , \ldots , |a_{n1}||x_1| + \cdots + |a_{nm}||x_m|)||_\infty \leq \\
&\leq ||(|a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{1m}| , \ldots , |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nm}|)||_\infty \leq \\
&\leq ||(m|a_{i^*j^*}| , m|a_{i^*j^*}| , \ldots , m|a_{i^*j^*}|)||_\infty = \\
&= m|a_{i^*j^*}| = m||A||_\infty .
\end{aligned}
$$

  Dall'arbitrarietà di x, passando al $\sup_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty$, segue la tesi.

$\square$

[1] con $\delta_{i,j}$ abbiamo indicato il simbolo di Kroenecker: $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$.