AM3 - Tutorato XII

SOLUZIONI

venerdì 28 maggio 2004

Esercizio 1. Poichè Σ è contenuta nel piano $x-y+z=1$, in ogni punto $P \in \Sigma$ il versore normale $\vec{N}_P$ coincide con un versore normale al piano $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)$ oppure con il suo opposto $\vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,-1)$. Scegliamo per Σ l'orientamento dato da $\vec{N}_P = \vec{n}_1$ e compatibilmente con questo diamo su $\partial\Sigma$ l'orientamento dato dalla seguente parametrizzazione:

$$\phi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1-\cos\theta+\sin\theta)$$

Sia allora $\vec{F} = (xz, yz, xy)$ il campo vettoriale associato all' 1-forma differenziale di cui viene richiesta l'integrazione su $\partial\Sigma$ abbiamo:

$$\vec{F}\circ\phi(t) = (\cos\theta(1-\cos\theta+\sin\theta),\ \sin\theta(1-\cos\theta+\sin\theta),\ \cos\theta\sin\theta)$$

ed inoltre

$$\dot{\phi}(t) = (-\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta+\cos\theta) \qquad \text{per } 0 \le \theta 2\pi$$

dunque:

$$\int_{\partial\Sigma^+} xz\,dx + yz\,dy + xy\,dz = \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ\phi(t)\cdot\dot{\phi}(t)\,d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta = \left[\frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Per applicare invece il teorema di Stokes e verificare l'uguaglianza dei due risultati calcoliamo anzitutto il rotore del campo vettoriale $\vec{F}$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xz & yz & xy \end{pmatrix} = (x-y)\vec{e}_1 + (x-y)\vec{e}_2$$

ed essendo $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)$ il versore normale a Σ abbiamo

$$\int_{\partial\Sigma^+} xz\,dx + yz\,dy + xy\,dz = \int_\Sigma \mathrm{rot}\,(xz,yz,xy)\cdot\vec{n}_1\,d\sigma =$$
$$= \int_\Sigma \frac{\sqrt{3}}{3}(x-y, x-y, 0)\cdot(1,-1,1)\,d\sigma = \int_\Sigma 0 = 0$$

In conclusione osserviamo che scegliendo l'altra determinazione della normale a Σ avremmo ottenuto ugualmente $\operatorname{rot}(xz, yz, xy) \cdot \vec{n}_2 = 0$ e dunque lo stesso risultato finale.

Esercizio 2. Sia $\vec{F} = \left(\frac{y}{1+z^2}, x^3 z^{97} - y, z + x^2\right)$ il campo vettoriale assegnato e S , D e γ rispettivamente la semisfera unitaria nel semispazio $\{z > 0\}$, il cerchio e la circonferenza di raggio 1. Osserviamo preliminarmente che $S \cup D$ è una superficie chiusa di $\mathbb{R}^3$ ed andiamo ad analizzare i quesiti proposti:

1. Per calcolare l'integrale assegnato, dal momento che $\vec{F}$ è piuttosto complicata e che il calcolo diretto dell'integrale richiederebbe calcoli eccessivi, utilizziamo il teorema della divergenza.

   Sia allora $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ t.c. x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ z \geq 0\}$ abbiamo che
$$\partial A = S \cup D$$
   e sia $\vec{n}$ la normale esterna ad A, sappiamo dal teorema della divergenza che
$$\int_{S \cup D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma_2 = \int_A \operatorname{div} \vec{F} \, d\sigma_3$$
   dove con $d\sigma_3$ indichiamo l'integrale di volume e con $d\sigma_2$ quello superficiale. Calcoliamo la divergenza del nostro campo vettoriale:
$$\operatorname{div}\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} F_i = -1 + 1 = 0$$
   e dunque:
$$\int_{S \cup D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$
   Sfruttando l'additività dell'integrale otteniamo che:
$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = -\int_D \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$
   dove però il calcolo dell'integrale al secondo membro è decisamente più immediato di quello inizialmente richiesto. Osserviamo che $\vec{n}$ è il versore normale esterno alla superficie A, per cui su D risulta $\vec{n} = (0, 0, -1)$. Parametrizziamo D in coordinate polari $(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, 0)$ con $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \theta \, 2\pi$ ed abbiamo:
$$\begin{aligned} \int_D \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \int_D -z - x^2 \, d\sigma = \\ = \quad & \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 -\rho^3 \cos^2\theta \, d\rho \right) \, d\theta = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$
   e dunque risulta:
$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \frac{\pi}{4}$$

2. Per calcolare l'integrale assegnato è sufficiente applicare la definizione di integrale di 1-forme differenziali su curve orientate. γ^+ è la curva di parametrizzazione

$$\phi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \qquad \text{con } 0 \leq \theta\, 2\pi$$

per cui:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^+} \omega^1_{\vec{F}} &= \int_0^{2\pi} F\left(\phi(\theta)\right) \cdot \dot{\phi}(\theta)\, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin\theta, -\sin\theta, \cos^2\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta\, d\theta = -\pi \end{aligned}$$

3. Per calcolare l'integrale richiesto basta osservare che l'orientazione positiva di γ è compatibile con l'orientazione della normale esterna $\vec{n}$ a S, per cui applicando il Teorema di Stokes ed utilizzando il punto precedente si ha:

$$\int_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_{\gamma^+} \omega^1_{\vec{F}} = -\pi$$

Esercizio 3. Indichiamo con Σ^+ la superficie del solido D orientata secondo la normale esterna $\vec{N}_e$ e calcoliamo

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}F_1 + \frac{\partial}{\partial y}F_2 + \frac{\partial}{\partial z}F_3 =$$

$$= -y\sin(x+y) + x\sin(x+y) = (x-y)\sin(x+y)$$

Applicando il teorema della divergenza abbiamo:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma^+}(\vec{F}) &= \int_{\partial\Sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{N}_e\, d\sigma_2 = \int_D \text{div}\vec{F}\, d\sigma_3 = \\ &= \iint_A \left((x-y)\sin(x+y) \int_0^{x+y} dz \right) dx\, dy = \\ &= \iint_A (x^2 - y^2)\sin(x+y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

dove $A\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ t.c. |y| \leq x \leq 2 - |y|\}$ e dove abbiamo usato la formula per integrali iterati in $\mathbb{R}^3$ considerando D come dominio normale rispetto all'asse z. Per calcolare l'integrale così ottenuto operiamo il cambio di variabili

$$T(x,y) = \begin{cases} u = & x+y \\ v = & x-y \end{cases} \qquad \text{con } |\det(T)| = \frac{1}{2}$$

senza soffermarci sui dettagli di questo cambio di coordinate dal momento che è stato già affrontato più volte in passato con dovizia di particolari (cfr. tutorato 8). Dunque essendo $A = T(S)$ dove $S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \; t.c. \, 0 \leq u \leq 2, \, 0 \leq v \leq 2\}$ risulta:

$$\begin{aligned}
& \iint_A (x^2 - y^2) \sin(x+y) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_S uv \sin u \, du \, dv = \\
= \quad & \frac{1}{2} \int_0^2 v \, dv \int_0^2 u \sin u \, du = \frac{1}{2} \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^2 \int_0^2 u \sin u \, du = \\
= \quad & [-u \cos u]_0^2 + \int_0^2 \cos u \, du = \sin 2 - 2 \cos 2
\end{aligned}$$