AM3 - Tutorato XI

SOLUZIONI

mercoledì 26 maggio 2004

Soluzione esercizio 1. Si ponga

$$\vec{F} = y^2 z^3 \vec{e_1} + 2xyz^3 \vec{e_2} + 3xy^2 z^2 \vec{e_3}$$

e sia $\omega = \omega^1_{\vec{F}}$ l'1-forma differenziale associata al campo vettoriale $\vec{F}$; si verifica agevolmente che $\vec{F} \in C^1\mathbb{R}^3$ e $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ ed altrettando facilmente si può notare che:

$$F = \nabla f \qquad \text{con } \; f = xy^2 z^3$$

per cui $\omega = df$ risulta essere una 1-forma esatta in tutto lo spazio. Pertanto, come coseguenza del teorema di Stokes o alternativamente come conseguenza del fatto che se ω è esatta su un dominio stellato A si ha:

$$\int_\gamma \omega = 0 \qquad \text{per ogni curva chiusa } \; \gamma \subset A$$

abbiamo che $\int_{\gamma_n} \omega$ non dipende dal particolare cammino scelto ma esclusivamente dal punto iniziale $P_1 = (1,1,0)$ e da quello finale $P_2 = (1, 1\, \sqrt[n]{2\pi})$. Sia allora β_n il segmento che unisce P_1 e P_2 avente la seguente parametrizzazione:

$$\vec{e_1} + \vec{e_2} + \sqrt[n]{2\pi}\, t\, \vec{e_3} \qquad 0 \le t \le 1$$

si ha:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} \omega = \lim_{n\to+\infty} \int_{\beta_n} \omega = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 F\left(\beta(t)\right) \cdot \dot{\beta}(t)\, dt = \\
= \;& \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left((2\pi)^{\frac{3}{n}}\, t^3, 2(2\pi)^{\frac{3}{n}}\, t^3, 3(2\pi)^{\frac{2}{n}}\, t^2 \right) \cdot (0,0,\, \sqrt[n]{2\pi})\, dt = \\
= \;& \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 3(2\pi)^{\frac{3}{n}}\, t^2\, dt = \lim_{n\to+\infty} (2\pi)^{\frac{3}{n}} = 1
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2. Calcoliamo separatamente l'integrale di ω sulle tre curve γ_i per $i = 1, 2, 3$. Osserviamo che sui punti di γ_1 si ha $z \equiv 0$ per cui:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} \frac{y^2}{x+1}\, dx + 2y \ln(1+x)\, dy$$

Adesso, poichè γ_1 è contenuta nel piano xy e l'1-forma differenziale $\frac{y^2}{x+1}\,dx + 2y\ln(1+x)\,dy$ è esatta nell'insieme $\{(x,y)\ t.c.\ x > -1\}$, con primitiva

$$F(x,y) = y^2\log(1+x)$$

possiamo concludere che:

$$\int_{\gamma_1}\omega = F(0,0) - F(1,0) = 0$$

Parametrizziamo ora il segmento γ_2 nel seguente modo:

$$\gamma_2(t) = t\vec{e_3} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

così da ottenere che:

$$\int_{\gamma_2}\omega = 0$$

(per il semplice fatto che $F \circ \gamma_2(t)$, dove $F(x,y,z) = \left(\frac{y^2}{x+1},\, 2y\ln(1+x),\, xz\right)$, è il vettore nullo).

Infine consideriamo la curva γ_3 che unisce i punti $(0,0,1)$ ed $(1,0,0)$ che può essere così parametrizata:

$$\gamma_3(t) = t\vec{e_1} + (1-t)\vec{e_3} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

e otteniamo:

$$\int_{\gamma_3}\omega = \int_0^1 t(1-t)(-1)\,dt = \int_0^1 t^2 - t = -\frac{1}{6}$$

In conclusione, sfruttando l' additività dell' integrale di 1-forme differenziali, abbiamo:

$$\int_{\gamma}\omega = \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega + \int_{\gamma_3}\omega = -\frac{1}{6}$$

Soluzione esercizio 3. Cominciamo col ricordare la validità delle seguenti proposizioni:

Proposizione 1. Sia ω_F^1 una 1-forma differenziale di classe C^1 (cioè il cui campo vettoriale associato F sia C^1) esatta su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow$ ω_F^1 è chiusa in A, ovvero F verifica la seguente identità:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \forall\, i,j = 1,\ldots,n$$

L'implicazione inversa è valida invece sotto opportune ipotesi aggiuntive che la seguente proposizione descrive:

Proposizione 2. Sia A un aperto stellato di $\mathbb{R}^n$ ed ω_F^1 una 1-forma differenziale chiusa in $A \Rightarrow \omega_F^1$ è esatta su A .

Inoltre se A è stellato con polo x_0 allora $\omega_F^1 = df$ dove $f(x) = \int_{\sigma(x_0,x)} \omega_F^1$ e $\sigma(x_0, x)$ indica il segmento che unisce i punti x_0 ed x .

Osserviamo che quest'ultima proposizione resta valida se sostituiamo l'ipotesi che A sia un aperto stellato con quella di essere un aperto semplicemente connesso.

Ricordiamo infine una caratterizzazione delle 1-forme esatte:

Proposizione 3. ω_F^1 è esatta su A aperto connesso di $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \int_\gamma \omega_F^1 = 0$ per ogni γ curva chiusa e semplice in A.

Tanto premesso passiamo all'analisi dell'esercizio risolvendo i quesiti proposti:

1. Consideriamo l'1-forma differenziale assegnata

$$\begin{aligned} \omega(x,y) &= \frac{\left(y^3 - x^2 y\right)\, dx + \left(x^3 - y^2 x\right)\, dy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \\ &= A(x,y)dx + B(x,y)dy \end{aligned}$$

   e osserviamo che essa è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ e non può essere estesa ad una 1-forma differenziale definita su tutto $\mathbb{R}^2$ dal momento che sia $A(x,y)$ che $B(x,y)$ non sono continue nell'origine (ad esempio perchè sono funzioni razionali omogenee di grado -1). Per verificare che ω è chiusa occorre mostrare che

$$\frac{\partial}{\partial y} A(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} B(x,y)$$

   La verifica è immediata, data la simmetria tra A e B , ed è lasciata allo studente. Allora abbiamo che ω è chiusa ma ciò non ci permette di concludere che è anche esatta visto che $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ non è un sottinsieme stellato (ne tantomeno semplicemente connesso) di $\mathbb{R}^2$ e dunque non siamo nelle condizioni di poter applicare la Proposizione 2 .

2. Sia $\alpha > 0$ e sia $\gamma_\alpha = +\partial B_\alpha$ la curva una cui parametrizzazione è:

$$\phi_\alpha(\theta) = \begin{cases} x = \alpha \cos\theta \\ y = \alpha \sin\theta \end{cases}$$

con $0 \leq \alpha < 2\pi$. Calcoliamo l'integrale assegnato:

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_\alpha} \omega = \int_0^{2\pi} & \frac{(\alpha \sin\theta)^3 - (\alpha\cos\theta)^2 \alpha \sin\theta}{\alpha^4}\, d(\alpha\cos\theta) + \\
+ \quad & \frac{(\alpha \cos\theta)^3 - (\alpha\sin\theta)^2 \alpha \cos\theta}{\alpha^4}\, d(\alpha\sin\theta) = \\
= \quad & \int_0^{2\pi} \frac{(\alpha \sin\theta)^3 - (\alpha\cos\theta)^2 \alpha \sin\theta}{\alpha^3} (-\sin\theta) + \\
+ \quad & \frac{(\alpha \cos\theta)^3 - (\alpha\sin\theta)^2 \alpha \cos\theta}{\alpha^3} \cos\theta \, d\theta = \\
= \quad & \int_0^{2\pi} \left(-\sin^4\theta + \cos^2\theta \sin^2\theta\right) + \left(\cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta\right)\, d\theta = \\
= \quad & \int_0^{2\pi} \left(\cos^4\theta - \sin^4\theta\right)\, d\theta = \\
= \quad & \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\, d\theta = \\
= \quad & \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta = 0
\end{aligned}
$$

3. Sia ora γ una qualsiasi curva chiusa e semplice in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ che rappresenti il bordo di un dominio contenente l'origine (sostanzialmete tale che "compia un giro attorno all'origine"). Per il teorema di Jordan (la cui dimostrazione è molto difficile ma il cui enunciato è estremamnte "intuitivo"), la curva γ divide il piano in due regioni aperte, una interna limitata ed una esterna illimitata. Sia E la regione interna allora, visto che γ è il bordo di un dominio contenente l'origine, $0 \in E$. Siccome E è un aperto, esisterà $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo tale che $\overline{B_\alpha(0)} \subset E$ (cioè la nostra regione contiene un disco chiuso di centro l'origine e raggio opportuno). Se consideriamo la regione

$$\Omega = E \setminus \overline{B_\alpha(0)}$$

la cui frontiera è $\partial\Omega = \gamma \cup \partial B_\alpha = \gamma \cup \gamma_\alpha$, utilizzando il teorema di Stokes (o meglio un suo caso particolare in $\mathbb{R}^2$ rappresentato dal teorema di Gauss-Green) ed il fatto che ω è chiusa, risulta :

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\gamma \cup \gamma_\alpha} \omega = \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial y} A(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} B(x,y)\right] dx\, dy = 0$$

e dunque:

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma_\alpha} \omega$$

e per il punto precedente possiamo concludere che

$$\int_\gamma \omega = 0$$

per ogni curva γ chiusa e semplice in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ che rappresenti il bordo di un dominio contenente l'origine.

4. Vogliamo ora mostrare che $\omega(x, y)$ è esatta utilizzando la Proposizione 3. Abbiamo visto nel punto precedente che se γ è una curva chiusa e semplice che "compie un giro attorno all'origine", allora l'integrale dell'1- forma assegnata lungo il cammino γ vale 0. Resta allora da analizzare il caso in cui γ è una curva chiusa che rappresenta il bordo di un dominio di $\mathbb{R}^2$ non contenente l'origine; si può mostrare che γ è contenuta in un sottodominio stellato di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (tale dimostrazione potrebbe presentare qualche difficoltà tecnico-formale ma è semplice convincersi della validità dell'affermazione); su tale sottodominio vale l'equivalenza tra esattezza e chiusura per cui la nostra $\omega(x, y)$ è esatta essendo ivi chiusa e dunque l'integrale su ogni cammino chiuso è nullo.

   Concludiamo dunque che $\omega(x, y)$ è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e dunque ammette una primitiva; esiste dunque $f(x, y)$ tale che $\omega = df$ ovvero tale che sono verificate le seguenti equazioni alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = A(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = B(x,y) = \frac{x^3 - y^2 x}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

   Potremmo allora integrare le due equazioni alle derivate parziali e trovare una tale f. É però più conveniente, data la natura di queste equazioni, studiare il problema con l'ausilio delle coordinate polari. Supponiamo allora di conoscere una primitiva f della nostra 1-forma differenziale ω e definiamo una nuova funzione g ottenuta esprimendo la f in coordinate polari nel seguente modo:

$$g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

   Vediamo quali condizioni sulla g impongono le condizioni sulle derivate parziali della f, utilizzando la regola di differenzianzione di funzioni composte in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} & g_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \\ = \quad & \frac{\partial}{\partial x} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta = \\ = \quad & \frac{(\rho\sin\theta)^3 - (\rho\cos\theta)^2\rho\sin\theta}{\rho^4}\cos\theta + \\ + \quad & \frac{(\rho\cos\theta)^3 - (\rho\sin\theta)^2\rho\cos\theta}{\rho^4}\sin\theta = \\ = \quad & \frac{\sin\theta^3\cos\theta - \cos\theta^3\sin\theta + \cos\theta^3\sin\theta - \sin\theta^3\cos\theta}{\rho} = 0 \end{aligned}$$

ed analogamente otteniamo una equazione per la variabile θ:

$$\begin{aligned} & g_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \\ = & \frac{\partial}{\partial x} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)(-\rho\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial y} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)(\rho\cos\theta) = \\ = & \frac{(\rho\sin\theta)^3 - (\rho\cos\theta)^2\rho\sin\theta}{\rho^4}(-\rho\sin\theta) + \\ + & \frac{(\rho\cos\theta)^3 - (\rho\sin\theta)^2\rho\cos\theta}{\rho^4}(\rho\cos\theta) = \\ = & \left(\sin^3\theta - \cos^2\theta\sin\theta\right)(-\sin\theta) + \left(\cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta\right)(\cos\theta) = \\ = & -\sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta = \\ = & \cos^4\theta - \sin^4\theta = \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \\ = & \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta \end{aligned}$$

Dalla prima equazione otteniamo che g non dipende dalla variabile ρ (è costante rispetto ad essa) ed integrando la seconda nella variabile θ risulta:

$$g(\rho,\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

In conclusione dobbiamo ricavare la f riscrivendo la g in coordinate cartesiane, cioè in termini di $\rho\cos\theta$ e $\rho\sin\theta$; abbiamo che:

$$\begin{aligned} g(\rho,\theta) &= \frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{2} = \cos\theta\sin\theta = \\ &= \frac{\rho\cos\theta\ \rho\sin\theta}{\rho^2} = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{aligned}$$

e dunque risulta:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

e si può facilmente verificare che questa è effettivamente una primitiva per ω.