AM3 - Tutorato X

SOLUZIONI

mercoledì 19 maggio 2004

Soluzione esercizio 1. La curva γ è espressa in coordinate polari dalla condizione:

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos\theta)$$

per cui ha la seguente parametrizzazione:

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta,\ \rho(\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Calcoliamo la norma euclidea della derivata di $\gamma(\theta)$:

$$\begin{aligned} & \| \dot\gamma(\theta) \| = \| (\dot\rho\cos\theta - \rho\sin\theta,\ \dot\rho\sin\theta + \rho\cos\theta) \| = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2} = \\ = \ & \sqrt{(-a\sin\theta)^2 + a^2(1+\cos\theta)^2} \ = \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta} = \\ = \ & a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta} \ = \ 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \end{aligned}$$

Allora abbiamo:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a$$

Soluzione esercizio 2. La curva γ è ottenuta intersecando il cono di equazione $x^2 = 2z^2 + \frac{1}{2}y^2$ con il piano $z = x - 1$ per cui sostituendo l'espressione della z nella prima equazione otteniamo:

$$x^2 = 2(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} \ \Rightarrow \ x^2 - 4x - 2 + \frac{y^2}{2} = 0 \ \Rightarrow \ \left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

Ricaviamo allora da questa equazione e da quella riguardante la variabile z una immediata parametrizzazione di γ

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x & = 2 + \sqrt{2}\cos\theta \\ y & = 2\sin\theta \\ z & = x(\theta) - 1 = 1 + \sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$. Abbiamo dunque:

$$\| \dot{\gamma}(\theta) \| = \| (-\sqrt{2}\sin\theta,\ 2\cos\theta,\ -\sqrt{2}\sin\theta) \| = 2$$

e quindi in conclusione:

$$\begin{aligned} \int_\gamma xy^2\, dl = 2\int_0^{2\pi} (2+\sqrt{2}\cos\theta)(2\sin\theta)^2\, d\theta = \\ = \quad 16\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta + 8\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta\, d\theta = \cdots = 16\pi \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 3. Parametrizziamo inizialmente, come richiesto, il cono C come grafico di una funzione f avente dominio in $\mathbb{R}^2$. La scrittura di C come forniita nel testo suggerisce la scelta di $f(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$. Abbiamo allora la seguente parametrizzazione (o pseudo inclusione) :

$$C(u,v) = \begin{cases} x & = u \\ y & = v \\ z & = f(u,v) = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}$$

dove x ed y variano, a priori, nel cerchio unitario centrato nell'origine che indichiamo con $B_1(0)$ (dal momento che $z \in [0.1]$). Osservaimo però che f non è C^1 nell'origine per cui faremo variare x ed y in $A = B_1(0) \setminus B_\epsilon(0)$ (con $\epsilon < 1$) per poi mandare ϵ a 0 ed ottenere l'integrale richiesto. Calcoliamo ora le derivate parziali della nostra pseudo-inclusione:

$$\begin{aligned} C_u(u,v) &= (1,0,f_u(u,v)) \\ C_v(u,v) &= (1,0,f_v(u,v)) \end{aligned}$$

da cui otteniamo:

$$C_u \wedge C_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)$$

per cui

$$\begin{aligned} \| C_u \wedge C_v \| = \| (-f_u, -f_v, 1) \| = \sqrt{1+f_u^2+f_v^2} = \\ = \quad \sqrt{1+\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Avendo ora tutti gli strumenti necessari, apllichiamo la definizione di integrale superficiale all'integrale assegnato:

$$\begin{aligned} \int_C \left(x^2+y^2\right)^n\, d\sigma = \int_{B_1(0)} \left(u^2+v^2\right)^n\ \| C_u \wedge C_v \|\ du\, dv = \\ = \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_A \left(u^2+v^2\right)^n\ \sqrt{2}\, du\, dv \end{aligned}$$

Passando ora a coordinate polari $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ su A (che ricordiamo essere una corona circolare centrata nell'origine e avente raggi 1 ed $\epsilon < 1$) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_C \left(x^2+y^2\right)^n \, d\sigma &= \sqrt{2} \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^{2n+1}, d\theta \right) d\rho = \\ = \quad 2\sqrt{2}\pi \lim_{\epsilon\to 0} \left[\frac{\rho^{2n+2}}{2n+2} \right]_\epsilon^1 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{n+1} \end{aligned}$$

Svolgiamo ora invece l'integrale assegnato considerando C come una superficie di rotazione. La curva nel semipiano di equazione $y = 0$ ed $x \geq 0$ da cui è ottenuta C tramite una rotazione di angolo 2π è:

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) = (t, t) \qquad \text{con } t \in [0,1]$$

che non è nient'altro che il segmento che unisce l'origine ed il punto $(1,0,1)$. Abbiamo allora la seguente parametrizzazione per C:

$$\phi(t,\theta) = \begin{cases} x &= u(t)\sin\theta = t\sin\theta \\ y &= u(t)\cos\theta = t\cos\theta \\ z &= v(t) = t \end{cases}$$

dove $(t,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \phi_t(t,\theta) &= (\dot{u}(t)\sin\theta, \dot{u}(t)\cos\theta, \dot{v}(t)) \\ \phi_\theta(t,\theta) &= (u(t)\cos\theta, -u(t)\sin\theta, 0) \end{aligned}$$

e sviluppando la matrice formale che rappresenta il prodotto vettoriale (analogamente a quanto fatto in precedenza) otteniamo :

$$\begin{aligned} \| \phi_u \wedge \phi_v \| &= \| (u\dot{v}\sin\theta, u\dot{v}\cos\theta, -u\dot{u}) \| = \\ = \quad u(t)\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2} &= \sqrt{2}\, t \end{aligned}$$

Osservando che la formula sopra riportata è valida in generale per qualsiasi superficie di rotazione ottenuta da una curva nel piano $y = 0$ con $x(t) \geq 0$ (così come è valida quella ottenuta in precedenza per le superfici di " tipo grafico"), concludiamo col calcolo dell' integrale assegnato:

$$\begin{aligned} \int_C \left(x^2+y^2\right)^n \, d\sigma &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} t^{2n} \, d\theta \right) \sqrt{2}\, t \, dt = \\ = \quad \cdots &= \frac{\sqrt{2}\pi}{n+1} \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4. La porzione della sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$ contenuta nel semispazio $z > 0$ è :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; t.c. \; : \; x^2+y^2+z^2 = 1 \, , \, z \geq 0\}$$

Parametrizziamo questa superficie utilizzando le coordinate sferiche:

$$\Psi(\theta,\phi) = \begin{cases} x &= \cos\theta\sin\phi \\ y &= \sin\theta\sin\phi \\ z &= \cos\phi \end{cases}$$

dove $(\theta,\phi) \in [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]$ (visto che consideriamo solo la semisfera superiore).
Abbiamo quindi le seguenti derivate parziali:

$$\begin{aligned} \Psi_\theta(\theta,\phi) &= (-\sin\theta\sin\phi\,,\ \cos\theta\sin\phi\,,\ 0) \\ \Psi_\phi(\theta\ \phi) &= (\cos\theta\cos\phi\,,\ \sin\theta\cos\phi\,,\ -\sin\phi) \end{aligned}$$

da cui, sviluppando la matrice formale del prodotto vettoriale, otteniamo:

$$\| \ \Psi_\theta \wedge \Psi_\phi \ \| = \| \ (-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin\phi\cos\phi) \ \| = \ \sin\phi$$

L' integrale assegnato diviene allora:

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{1}{x^2+y^2-2}\,d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi}{\sin^2\phi - 2}\,d\theta \right) d\phi = \\ = \quad & 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi}{\sin^2\phi-2}\,d\phi = -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi}{\cos^2\phi+1}\,d\phi = \\ = \quad & 2\pi \left[\arctan(\cos\phi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$