**AM3 - Soluzioni del Tutorato I - Mercoledì 25 febbraio 2004 d.C.**

1. Verifichiamo per prima cosa che la funzione $||f||_{C^1}$ è una norma sullo spazio $S$ :
   Ovviamente

$$\begin{array}{ll} & ||f||_{C^1} \geq 0 \, \forall f \in S \\ \text{e} & ||f||_{C^1} = 0 \Rightarrow \sup\limits_{(0,1)} |f| = 0 \Rightarrow |f| = 0 \, \forall x \in (0,1)\,. \end{array}$$

   L'omogeneità e la disuguaglianza triangolare si dimostrano sfruttando le analoghe proprietà di $|\cdot|$:

$$\begin{aligned} \forall f \in S ||af||_{C^1} &= \sup_{(0,1)} |af| + \sup_{(0,1)} |(af)'| \\ &= \sup_{(0,1)} a|f| + \sup_{(0,1)} a|f'| \\ &= a \sup_{(0,1)} |f| + a \sup_{(0,1)} |f'| = a||f||_{C^1}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||f+g||_{C^1} &= \sup_{(0,1)} |f+g| + \sup_{(0,1)} |(f+g)'| \\ &\leq \sup_{(0,1)} (|f|+|g|) + \sup_{(0,1)} (|f'|+|g'|) \\ &\leq \sup_{(0,1)} |f| + \sup_{(0,1)} |g| + \sup_{(0,1)} |f'| + \sup_{(0,1)} |g'| \\ &\leq ||f||_{C^1} + ||g||_{C^1}\,. \end{aligned}$$

   Abbiamo così mostrato che $(S, ||f||_{C^1})$ è uno spazio normato. Resta dunque da verificare la completezza:
   data una generica successione di Cauchy a valori in $S$ facciamo vedere che essa ammette limite in $S$.
   Sia $f_n$ una successione di Cauchy in $S$, ovvero
   $\forall \epsilon \geq 0 \, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $||f_n - f_m||_{C^1} < \epsilon$ se $n, m \geq N_\epsilon$ .
   Nel nostro caso avremo che
   se $n, m \geq N_\epsilon$ allora $\sup\limits_{(0,1)} |f_n - f_m| + \sup\limits_{(0,1)} |(f_n - f_m)'| < \epsilon\,,$

   da cui seguono immediatamente:

$$\sup_{(0,1)} |f_n - f_m| < \epsilon \text{ se } n, m \geq N_\epsilon \tag{1}$$

$$\sup_{(0,1)} |f'_n - f'_m| < \epsilon \text{ se } n, m \geq N_\epsilon \tag{2}$$

L' equazione (1) è la definizione di convergenza uniforme della successione di funzioni $f_n$. Abbiamo dunque che $\exists f := \lim_{n\to+\infty} f_n$.
Occorre mostrare che $f \in S$.
Notiamo che $f$ è continua in quanto limite uniforme di funzioni continue ed è derivabile con derivata $f' := \lim_{n\to+\infty} f'_n$ poichè le $f_n$ sono derivabili e la successione delle derivate converge uniformemente ( è proprio quanto afferma la (2) ); inoltre $f'$ è continua come visto per $f$.
Infine $||f||_{C^1} \leq ||f_{N_\epsilon}||_{C^1} + ||f - f_{N_\epsilon}||_{C^1} \leq ||f_{N_\epsilon}||_{C^1} + \epsilon < \infty$,
dunque $f \in S$. $\square$

2. (a) Eseguendo la divisione euclidea tra i due polinomi otteniamo:
$$\int \frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}\, dx = \int x + \frac{3x - 2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{3x-2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}\, dx\ .$$

Consideriamo ora il polinomio al denominatore della funzione razionale integranda:
esso ha un'unica radice reale $x = 1$ e si scompone dunque come $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$.
Scriveremo la funzione integranda nella forma
$$\frac{3x-2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2}\ ,$$
dove i coefficienti $A, B, C$ sono dati da:
$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2} = \frac{A(x^2 - 2x + 2) + (Bx + C)(x-1)}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} =$$
$$= \frac{(A+B)x^2 + (-2A - B + C)x + 2A - C}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} = \frac{3x-2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}$$
da cui, per il principio di identità dei polinomi ,
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B + C = 3 \\ 2A - C = -2 \end{cases}$$
e quindi $A = 1,\ B = -1,\ C = 4$.
Possiamo ora calcolare agevolmente l'integrale dato:
$$\frac{1}{2}x^2 + \int \frac{3x-2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{dx}{x-1}\, dx + \int \frac{-x+4}{x^2 - 2x + 2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x-1| + \int \frac{-x+4}{(x-1)^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x-1| \int \frac{-(x-1)+3}{(x-1)^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + 3\arctan(x-1) + K.$$

(b) Applichiamo la sostituzione $2x-3 = t^4$ in modo da eliminare le radici:

poichè $x = \dfrac{t^4+3}{2} \Rightarrow dx = 2t^3\,dt$ , avremo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3} - \sqrt[4]{2x-3}} = \int \frac{2t^3 dt}{t^2-t} = 2\int \frac{t^2}{t-1}\,dt =$$
$$= 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,dt = 2\int \frac{(t^2-1)}{t-1}\,dt + 2\int \frac{dt}{t-1} =$$
$$= 2\int t+1\,dt + 2\int \frac{dt}{t-1} = t^2 + 2t + 2\ln|t-1| + K =$$
$$= (\sqrt[4]{2x-3}+1)^2 + 2\ln(\sqrt[4]{2x-3}-1) + K.$$

(c) Applicando il metodo del completamento del quadrato, come indicato nel suggerimento, possiamo scrivere

$x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}.$

Tramite la sostituzione $x+\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sinh t$ $\left(\Rightarrow dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\,dt\right)$,

otteniamo allora:

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sinh^2 t+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\,dt =$$
$$= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\,dt =$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}\int \sinh t\cosh^2 t\,dt - \frac{3}{8}\int \cosh^2 t\,dt =$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}\,\frac{\cosh^3 t}{3} - \frac{3}{8}\int \cosh^2 t\,dt.$$

Integrando per parti, calcoliamo $\displaystyle\int \cosh t\cosh t\,dt = \int \cosh t(\sinh t)'\,dt =$

$$= \cosh t\sinh t - \int \sinh^2 t\,dt = \cosh t\sinh t - \int \cosh^2 t - 1\,dt =$$
$$= \cosh t\sinh t + t - \int \cosh^2 t\,dt$$
$$\Rightarrow \int \cosh^2 t\,dt = \frac{1}{2}(\sinh t\cosh t + t)$$

da cui otteniamo:

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\cosh^3 t}{3}-\frac{3}{8}\int \cosh^2 t\,dt =$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\cosh^3 t}{3}-\frac{3}{16}(\sinh t\cosh t+t)+K=$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{x^2+x+1})^3-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}-$$
$$-\frac{3}{16}\ln\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\right]+K,$$

dove si sono utilizzate le sostituzioni inverse :

$$\sinh t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\ ;\ \ \cosh t=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\,;$$
$$t=\ln\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\right]\,.$$

(d) $\int \sin^{2003} x\,dx \ = \ \int \sin^{2002} x\sin x\,dx \ = \ \int (\sin^2 x)^{1001}\sin x\,dx \ = \int (1-\cos^2 x)^{1001}\sin x\,dx.$

Applicando la sostituzione $\cos x = t\,(\Rightarrow dt=-\sin x dx)$, otteniamo

$$\int (1-\cos^2 x)^{1001}\sin x\,dx = -\int (1-t^2)^{1001}\,dt = -\int \sum_{j=0}^{1001}\binom{1001}{j}(-t^2)^j\,dt =$$
$$=\sum_{j=0}^{1001}\binom{1001}{j}(-1)^{j+1}\int t^{2j}\,dt=\sum_{j=0}^{1001}\binom{1001}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{2j+1}t^{2j+1}\ +K=$$
$$=\sum_{j=0}^{1001}\binom{1001}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{2j+1}\cos^{2j+1} x\ +K.$$