Soluzioni Prova scritta di AM3 del 19/7/2004 (Appello B)

1) (i) $y(x) = -\frac{3}{16}\, e^{-x} + \frac{3}{16}\, e^{\frac{x}{3}} + \frac{3}{4} x\, e^{\frac{x}{3}}$.

(ii) $y(x) \equiv 0$ e

$$y = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x \ , & \text{se } x \in (0,\pi) \\ 0 \ , & \text{se } x \notin (0,\pi) \end{cases}$$

sono due soluzioni. Esistono, in effetti, infinite soluzioni del problema dato: per ogni $\alpha \in [0,\pi/2]$, sia

$$y_\alpha(x) := \begin{cases} 0 \ , & \text{se } x \le \alpha \ \text{ oppure } \ x \ge \pi - \alpha \ , \\ (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \alpha)^2 \ , & \text{se } \alpha < x < \pi - \alpha \ , \end{cases}$$

allora per ogni successione $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $\alpha_n \in [0,\pi/2]$

$$y(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_{\alpha_n}(x - 2\pi n)$$

è soluzione del problema di Cauchy dato.

2) (i) La minima distanza dall'origine è raggiunta nei punti $(0,0,\pm 1)$ della superficie.

3) Per il teorema della divergenza,

$$\int_S F \cdot n \, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (z + x + y)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{8} \ . \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \int_S f \, d\sigma \ &= \ \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [(z^2 + z)\sqrt{1+z^2} + z^4 \cos^3 t + z^3 \sin^2 t]\, dz\, dt \\ &= \ -\frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{25\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \operatorname{arcsinh} 1 + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}. \end{aligned} \tag{2}$$

4) $g'(0) = 0$.