Prova scritta di AM3 del 19/7/2004
Appello B

1. Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.
2. **Indicare sull'elaborato: nome e cognome, n. matricola.**
3. Per superare l'esame è **necessario** svolgere l'esercizio 3.

1) (i) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}y = e^{x/3} , \qquad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1 .$$

(ii) Si trovino due soluzioni $C^1(\mathbb{R})$ della seguente equazione differenziale:

$$y' = 2\sqrt{y}\cos x , \qquad y(2\pi) = 0 .$$

Quante altre soluzioni $C^1(\mathbb{R})$ esistono di tale equazione differenziale?

2) (i) Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si trovi il punto (o i punti) più vicini all'origine della superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = xy + 1\} .$$

(ii) Si dia una giustificazione teorica del metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

3) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_S F \cdot n d\sigma , \qquad F := (xz, xy, yz) , \tag{1}$$

dove $S = \partial\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \geq 0, \; y \geq 0, z \geq 0 , x + y + z \leq 1\}$ e n è la normale esterna ad S;

$$\int_S f d\sigma , \qquad f := (z + 1)\sqrt{1 + x^2 + y^2} + x^3 + y^2 , \tag{2}$$

dove $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = z^2 \; , \; 0 < z < 1\}$.

4) Sia $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y) + y^4/(1 + \operatorname{sen}^2(xy))$. Dimostrare che se $g(x)$ è una funzione continua che verifica $g(0) = 0$ e $f(x, g(x)) = 0$ allora g è derivabile in 0. Calcolare $g'(0)$.

5) Enunciare e dimostrare il lemma di Poincaré per 1-forme su domini stellati.