**Prova scritta di AM3 dell'11/6/2004**
**Appello A e recupero esoneri**

Recupero I esonero: esercizi da 1) a 5).
Recupero II esonero: esercizi da 6) a 10).
Appello A: esercizi 1(i), 3, 5, 6, 7, 9.

Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.

**Indicare sul foglio: nome e cognome, n. matricola, tipo di esame scelto.**

**1)** (i) Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$x'' + 4x = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(2t) \ , \qquad x(0) = 1 \ , \quad x'(0) = 0 \ .$$

(ii) Si discuta l'intervallo di esistenza massimale per il seguente problema di Cauchy:

$$tx'' + 2x' + tx = 0 \ , \qquad x(\pi/2) = 0 \ , \quad x'(\pi/2) = 1 \ .$$

**2)** Sia $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y+z=0\} \cap \{x^2+y^2+z^2 = 24\}$ e si determinino il massimo ed il minimo di $f(x,y,z) = xy + 2z$ su $\Gamma$.

**3)** Sia $f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to (\delta + \operatorname{sen}(x_1 + x_2^3), x_2 \cos(x_1 x_2)) \in \mathbb{R}^2$. Per quali valori di $\delta$ ha soluzione il sistema $f(x) = 0$?

**4)** (i) Dimostrare che $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto per successioni se e solo se $K$ è chiuso e limitato.
(ii) Dare un esempio di insieme chiuso e limitato non compatto.

**5)** Si renda precisa e si dimostri la seguente affermazione: "la matrice jacobiana della composizione di funzioni (vettoriali) è data dal prodotto delle matrici jacobiane".

**6)** Siano

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2+y^2}{2} \ , x^2+y^2 \le 1 \right\} \ , \qquad f(x,y,z) = x^{100} y + z + \sqrt{z} \ ,$$

e si calcoli $\int_S f \, d\sigma$.

**7)** (i) Sia $S$ la superficie in $\mathbb{R}^3$ data da $S := \{z = x^2 + y^2 \ , \ x^2 + y^2 \le 4\}$. Si mostri che $S$ è una superficie elementare con bordo ed orientabile; se ne descriva il bordo $\Gamma$; si trovi una normale $\nu^+$ ad $S$ ed un orientamento su $\Gamma$ in modo tale che $(\Gamma^+, \nu^+)$ siano equiorientati (ovvero verifichino la "regola della mano destra").
(ii) Si enunci il teorema di Stokes per superfici in $\mathbb{R}^3$ con bordo e lo si verifichi esplicitamente nel caso di $S$ e $\Gamma$ come al punto precedente per il campo vettoriale $F := (x+y, z-y, x^3 y)$.

**8)** Sia $F := (1 - \operatorname{sen} x, -1, z\cos x)$. Verificare che $\nabla \cdot F = 0$ e trovare una $G$ tale che $F = \nabla \times G$.

**9)** (i) Si definisca la misura di Peano-Jordan in $\mathbb{R}^2$ e si dimostri che è invariante per traslazioni.
(ii) Si discuta l'additività dell'integrale di Riemann.
(iii) Si enunci il teorema del cambio di variabile in $\mathbb{R}^2$ e lo si usi per calcolare $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

**10)** Si renda precisa e si dimostri la seguente affermazione: "una 1–forma è esatta se e solo se il suo integrale sulle curve chiuse è nullo".