Soluzioni 8-AM3

Laura Di Gregorio

30 aprile 2004

1. Facendo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi & \qquad 0 \le \varphi \le \pi \\ y = r\sin\varphi & \qquad 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

si ha che

$$\begin{aligned} \iint_S xy\,dxdy &= \int_0^1 r^2 \sin\varphi \int_0^\pi (2 + r\cos\varphi)\,d\varphi\,dr \\ &= 2\int_0^1 r^2 \int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi\,dr + \int_0^1 r^3 \int_0^\pi \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\,dr = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2. Si osservi che per ogni $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$y \ge 2x^2 \quad \text{e} \quad x \ge \frac{1}{y}$$

quindi $\mathcal{D}$ è contenuto nel primo quadrante aperto.
Facendo il cambio di coordinate

$$\frac{x^2}{y} = \xi \quad \text{e} \quad xy = \eta \tag{1}$$

si ha

$$\Phi : (x, y) \longrightarrow (\xi, \eta)$$

la trasformazione definita da (1), allora

$$\Phi(\mathcal{D}) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3} \le \xi \le \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \le \eta \le 1\}.$$

Inoltre Φ è invertibile su $\mathcal{D}$ e

$$|J\Phi(x, y)| = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & \frac{-x^2}{y^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{3x^2}{y}$$

da cui

$$|J\Phi^{-1}(\xi,\eta)| = \frac{1}{J\Phi(\Phi^{-1}(\xi,\eta))} = \frac{1}{3\xi}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{y}\, e^{xy}\, dx\, dy &= \iint_{\Phi(\mathcal{D})} \xi\, e^{\eta} |J\Phi^{-1}(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta \\
&= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{\eta}}{3}\, d\eta \right] d\xi = \frac{e-\sqrt{e}}{18}.
\end{aligned}$$