# *Soluzioni 7-AM3*

*Laura Di Gregorio*

23 aprile 2004

**1.** La funzione integranda è prolungabile con continuità sul compatto misurabile $\overline{D}$ (infatti per $y \to 0$ abbiamo che $\dfrac{\sin y^2}{y} \longrightarrow 0$) quindi è integrabile su $D$.

Integrando prima rispetto ad $x$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\sin y^2}{y}\, dxdy &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{y^2} \frac{\sin y^2}{y}\, dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} y \sin y^2\, dy \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos y^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1.\end{aligned}$$

**2.** L'integrale esiste ed è nullo in quanto la funzione integranda è dispari rispetto alla bisettrice degli assi $y = x$, cioè

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

ed il dominio d'integrazione è simmetrico rispetto alla bisettrice stessa.

**3.**

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^1 (x \sin y - x^2 y)\; dx\, dy &= \int_0^{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\sin y - \frac{x^3}{3} y\right]_0^1 dy \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin y - \frac{1}{3} y\right) dy = 1 - \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{\pi} (x \sin y - x^2 y)\; dy\, dx &= \int_0^1 \left[-x\cos y - x^2\frac{y^2}{2}\right]_0^{\pi} dx \\ &= \int_0^1 \left(x - x^2\frac{\pi^2}{2} + x\right) dx = 1 - \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

**4.**

**a)**

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{x^{-1}}^{x} \frac{1}{y^2}\, dy = \frac{9}{4}$$

**b)** Il dominio $\mathcal{D}$ si può scrivere come dominio normale rispetto alle $x$:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\}$$

quindi l'integrale si calcola

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} y^3 e^x\, dx\, dy &= \int_0^1 y^3 dy \int_{y^2}^1 e^x dx \\
&= \int_0^1 y^3 (e - e^{y^2}) dy \\
&= \frac{e}{4} - \int_0^1 y^3\, e^{y^2} dy \\
&= \frac{e}{4} - \int_0^1 y^2\, (y\, e^{y^2}) dy \\
&= \frac{e}{4} - \int_0^1 y^2\, \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (e^{y^2}) dy \\
&= \frac{e}{4} - \frac{e}{2} + \int_0^1 y\, e^{y^2} dy \\
&= \frac{e}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**c)** Il dominio $\mathcal{D}$ si può scrivere come dominio normale rispetto alle $y$:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$$

quindi l'integrale si calcola

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} xy\, dx\, dy &= \int_0^1 x\, dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\, dy \\
&= \int_0^1 x \left( \frac{1 - x^2}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$