Soluzioni 5-AM3

Laura Di Gregorio

29 marzo 2004

1. Il punto di equilibrio stabile è quello per cui l'energia potenziale del sistema ha un minimo.
Bisogna minimizzare la funzione

$$f(x,y) = mgy + \frac{1}{2}k\{(x-1)^2 + y^2\}$$

con vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$$\begin{cases} k(x-1) + 2\lambda x = 0 \\ mg + ky + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si trovano le soluzioni

$$x = \frac{k}{k+2\lambda} \qquad\qquad y = \frac{-mg}{k+2\lambda}$$

e mettendole nel vincolo si ha

$$(k+2\lambda)^2 = k^2 + m^2g^2.$$

Quindi le soluzioni del sistema sono

$$P_1 = \left(\frac{k}{\sqrt{k^2+m^2g^2}}, -\frac{mg}{\sqrt{k^2+m^2g^2}}\right)$$

e

$$P_2 = \left(-\frac{k}{\sqrt{k^2+m^2g^2}}, \frac{mg}{\sqrt{k^2+m^2g^2}}\right)$$

che corrispondono al minimo e al massimo rispettivamente.

2. Si cercano i punti stazionari per la funzione di 5 variabili:

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 3y - z + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(z - 2x - 4y).$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x - 2\mu = 0 \\ 3 + 2\lambda y - 4\mu = 0 \\ -1 - \lambda + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 = z \\ 2x + 4y = z. \end{cases}$$

Si trova $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ e

$$P_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{5}}{2}, 10 + 6\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

e

$$P_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{5}}{2}, 10 - 6\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

che corrispondono al minimo e massimo rispettivamente.

3. Si risolva il sistema

$$\begin{cases} 4x + 2\lambda xyz = 0 \\ 2y + \lambda x^2 z = 0 \\ 2z + \lambda x^2 y = 0 \\ x^2 yz - 1 = 0. \end{cases}$$

Si trova $\lambda = \pm 2$ e il minimo è 4.