Soluzioni 4-AM3

Laura Di Gregorio

15 marzo 2004

1. La soluzione dell'omogenea è:

$$u_0(t) = ce^{-\int a(t)dt}.$$

Si cerca una soluzione particolare della non omogenea del tipo

$$\bar{u}(t) = c(t)e^{-\int a(t)dt}.$$

Mettendo $\bar{u}$ dentro l'equazione si ottiene:

$$c(t) = \int f(t)e^{\int a(\tau)d\tau}dt + cost.$$

Quindi la soluzione generale della non omogenea è:

$$u(t) = e^{-\int a(t)dt}\left(c + \int f(t)e^{\int a(\tau)d\tau}\right).$$

Nel caso richiesto basta dunque calcolare

$$\int t\sinh^3 t\, dt.$$

2. La soluzione dell'omogenea è

$$u_0(t) = c_1\cos t + c_2\sin t.$$

Si cerca una soluzione particolare della non omogenea

$$\bar{u}(t) = e^t(b_1\sin t + b_2\cos t).$$

Mettendo $\bar{u}$ dentro l'equazione si ottiene:

$$\ddot{\bar{u}} + \bar{u} = [(2b_1 + b_2)\cos t + (-2b_2 + b_1)\sin t] = e^t \sin t$$

da cui segue che

$$b_1 = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad b_2 = -\frac{2}{5}$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione si ottiene sommando a una soluzione particolare della non omogenea, per esempio

$$\bar{u}(t) = \frac{e^t}{5}(\sin t - 2\cos t),$$

la soluzione generale dell'omogenea.

3. Il polinomio caratteristico associato ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}.$$

- Se $a = 1$ allora $\lambda = -1$ e $u_0(t) = ce^{-t}$. La soluzione generale è del tipo:

  $$u(t) = (c_1 t + c_2)e^{-t}$$

  e dai dati iniziali segue che $u \equiv 0$.

- Se $a > 1$ si hanno autovalori complessi coniugati per cui la soluzione generale è:

  $$u(t) = e^{-t}(c_1 \cos \sqrt{a-1}\, t + c_2 \sin \sqrt{a-1}\, t).$$

  Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

  $$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 e^{-1} \sin \sqrt{a-1} = 0 \end{cases}$$

  che è verificata per $c_2 \neq 0$ se $a = k^2\pi^2 + 1$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
  Dunque per tali valori di a si ha una soluzione non nulla.

- Se $a < 1$ si hanno autovalori reali $\lambda_{1,2}$ per cui la soluzione generale è:

  $$u(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}).$$

  Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

  $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2} = 0 \end{cases}$$

  da cui segue che $u \equiv 0$.