Soluzioni 1-AM3

Laura Di Gregorio

27 febbraio 2004

1. $y = 0$ è un integrale particolare. Si scriva l'equazione nella forma integrale

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}\, dt.$$

Integrando si ottiene

$$\log|y| = \frac{1}{2}\log(1+e^{2t}) + cost$$

da cui segue che $y = k\sqrt{1+e^{2t}}$, k costante.
Si osservi che

- se $k > 0$ allora $y > 0$;
- se $k < 0$ allora $y < 0$.

2. $y = 0$ è un integrale particolare. Deve essere $x \neq \pm 1$ affinché la funzione in x sia continua. Si scriva l'equazione nella forma integrale

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1}\, dx.$$

Integrando si ottiene

$$\log|y| = \log|x-1| + \log|x+1| + cost$$

da cui segue che $|y| = k|x^2-1|$, k costante.

3. Sia $y \neq x$. Ponendo $z = \frac{y}{x}$ con $x \neq 0$ si ha

$$y' = z'(x)x + z(x).$$

L'equazione integrale per z è:

$$\int \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{1+z^2} \right) dz = \int \frac{dx}{x}.$$

Integrando si ottiene

$$\arctan z - \frac{1}{2} \log(1+z^2) = \log|x| + cost.$$

Tornando alla variabile y si ottiene l'integrale generale in forma implicita:

$$\begin{aligned} \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{x^2+y^2}{x^2} \right) &= \log|x| + cost \\ &= \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) = cost. \end{aligned}$$

4. Per $t \neq 0$ l'equazione è a variabili separabili.

$$\int (1+y^2) dy = 3 \int \frac{1}{t} dt.$$

Integrando si ottiene

$$y + \frac{y^2}{3} = 3 \log|t| + c$$

che è l'integrale generale.