Soluzioni 12-AM3

Laura Di Gregorio

26 maggio 2004

1. Per applicare il teorema di Gauss Green occorre trovare una forma differenziale

$$\omega = Pdx + Qdy$$

di classe C^1 in D tale che

$$Q_x - P_y = x^2 \, .$$

In generale data una funzione $f(x, y)$ è sempre possibile trovare due funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ tali che $Q_x - P_y = f(x, y)$. Per esempio

$$P = 0 \qquad \text{e} \qquad Q = \int f(x, y)\, dx \, .$$

Con questa scelta $P = 0$ e $Q = x^3/3$. Il bordo di D è composto dalla crf con raggio $\sqrt{2}$ orientata positivamente e dalla crf di raggio 1 orientata negativamente, dunque l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 dx\, dy &= \int_{\partial^+ D} \frac{x^3}{3}\, dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\cos\theta)^3\, d(\sqrt{2}\sin\theta) - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\sin\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

2. Si scriva

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) dx_i \qquad \textit{dove } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, .$$

In questo caso $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
La forma è chiusa e, essendo $\mathbb{R}^2$ stellato è anche esatta. Esiste $f \in C^1$ tale che $\omega = df$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i(\mathbf{x}).$$

Risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x$$

dunque

$$f(x,y) = \int ye^x dx + g(y) = ye^x + g(y)$$

dove g è una funzione C^1 che verifica

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + g'(y) = e^x - \cos y\,.$$

Segue facilmente che

$$g(y) = -\sin y + \text{costante}$$

da cui

$$f(x,y) = ye^x - \sin y + \text{costante}\,.$$