Soluzioni 11-AM3

Laura Di Gregorio

26 maggio 2004

(i) E' facile verificare che

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = 0$$

quindi dal teorema della divergenza, osservando che la normale uscente alla base della semisfera (il disco D) è $\vec{n} = (0, 0, -1)$ abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma \\ &= \int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \int_D \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma \\ &= \int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma - \int_D x^2 dxd. \end{aligned}$$

Passando in coordinate polari nel secondo integrale otteniamo

$$\begin{aligned} \int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma - \int_D x^2 dxdy &= \int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma - \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 t\, dtdr \\ &= \int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma - \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \frac{(1-\cos 2t)}{2}\, dtdr \\ &= \int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

da cui segue ovviamente che

$$\int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \frac{\pi}{4}.$$

(ii) Calcoliamo

$$\int_{\gamma^+} \omega_F^1 = \int_\gamma y\, dx - y\, dy$$

e passando in coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma y\,dx - y\,dy &= \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d(\cos\theta) - \sin\theta\, d(\sin\theta) \\ &= -\int_0^{2\pi} \left(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta\right) d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = -\pi.\end{aligned}$$

(iii) Il teorema di Stokes dice che

$$\int_{\gamma^+} \omega_F^1 = \int_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma.$$

Abbiamo già calcolato il primo integrale

$$\int_{\gamma^+} \omega_F^1 = -\pi.$$

Applicando il teorema della divergenza al $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ otteniamo che

$$\int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot}\overrightarrow{F}) = \int_{\partial\Sigma} \operatorname{rot}\overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma.$$

E' facile verificare che

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overrightarrow{F}) = 0$$

da cui segue immediatamente

$$\int_{\partial\Sigma} \operatorname{rot}\overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$$

e da questo segue ancora

$$\int_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\int_D \operatorname{rot}\overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma.$$

La normale uscente al disco è, come già abbiamo osservato prima, $\vec{n} = (0, 0, -1)$, quindi basta calcolare la terza componente del rotore di $\overrightarrow{F}$ ristretta al piano $z = 0$:

$$(\operatorname{rot}\overrightarrow{F})_3\Big|_{z=0} = 5x^4 z^{100} - \frac{1}{1+z^2}\Big|_{z=0} = -1$$

e sostituendo nell'integrale si ottiene

$$-\int_D \mathrm{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\int_D d\sigma = -\pi$$

e dunque il teorema di Stokes è verificato.