Soluzioni 1-AM3

Laura Di Gregorio

27 febbraio 2004

1. Sostituendo $e^x = y$ si ottiene

$$\frac{1+2y}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1}$$

da cui, procedendo come sempre, si ottiene la soluzione

$$\int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\ dx = -x + \frac{3}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\ln|e^x+1|$$

2. Sostituendo $t = \tan\frac{x}{2}$ si ottiene

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

e quindi l'integrale diventa

$$\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\ dx = \int \frac{2dt}{t^2(1+t^2)} = -\frac{2}{t} - 2\arctan t = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}} - x$$

3. Integrando per parti due volte, si ha

$$\begin{aligned} \int x(1+x^2)e^{x^2}\ln x\ dx &= \frac{e^{x^2}}{2}(1+x^2)\ln x - \int \frac{e^{x^2}}{2}\left(2x\ln x + \frac{1+x^2}{x}\right) dx \\ &= \frac{e^{x^2}}{2}(1+x^2)\ln x - \frac{e^{x^2}}{2}\ln x - \int \frac{e^{x^2}}{2}\, x\, dx \end{aligned}$$

Ponendo $t = x^2$ nell'ultimo integrale, si ottiene che

$$\begin{aligned}\frac{e^{x^2}}{2}(1+x^2)\ln x - \frac{e^{x^2}}{2}\ln x - \int \frac{e^{x^2}}{2}\, x\, dx &= \frac{e^{x^2}}{2} x^2 \ln x - \int \frac{e^t}{4}\, dt \\ &= \frac{e^{x^2}}{2}\, x^2 \ln x - \frac{e^{x^2}}{4}\end{aligned}$$

4. Perché l'integrale abbia senso deve essere $x \neq -1$.
Si osserva subito che $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$.
Ponendo

$$x + 1 = \sinh t$$

da cui segue che $dx = \cosh t dt$ e utilizzando la relazione nota

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} &= \int \frac{\cosh t dt}{\cosh t \sinh^2 t} \\ &= \int \frac{dt}{\sinh^2 t} = -\coth t \\ &= -\frac{\cosh t}{\sinh t} = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}\end{aligned}$$

con $x \neq -1$.

5. Per $x \geq 2$ si può fare la sostituzione $x = 2\cosh t$ e si ha che

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-4}\, dx &= 2\int \sinh t \sqrt{4\cosh^2 t - 4}\, dt \\ &= 4\int \sinh^2 t\, dt = 2\int (\cosh 2t - 1)\, dt \\ &= \sinh 2t - 2t = 2\cosh t \sinh t - 2t\end{aligned}$$

dove nella terza uguaglianza è stata usata la relazione

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1).$$

Sostituendo, per $x \geq 2$, si ottiene

$$\begin{aligned} 2\cosh t \sinh t - 2t &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left|\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right| \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left|x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right| + \mathrm{cost} \end{aligned}$$