AM3 - II Esonero - A.A.2003-2004

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

7 giugno 2004

1. Parametrizzando Γ con (x, x^2), $x \in [0,1]$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (1 + x^2 + 3y)\, d\ell &= \int_0^1 (1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}\, dx \\
&= \left[\sqrt{1+4x^2}\left(\frac{5}{8}x + x^3\right) + \frac{3}{16}\operatorname{arcsinh} 2x\right]_0^1 \\
&= = \frac{26\sqrt{5} + 3\operatorname{arcsinh} 2}{16}.
\end{aligned}$$

(Per risolvere l'integrale usare la sostituzione $2x = \sinh t$).

2. Una parametrizzazione della superficie è

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \qquad \rho \in [1, \sqrt{2}],\ \theta \in [0, \pi/2], \\ y = \rho \sin\theta \\ z = \theta \end{cases}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\int_S x^2\, d\sigma &= \frac{\pi}{4}\int_1^{\sqrt{2}} \rho^2\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\sqrt{1+\rho^2}\left(\frac{\rho}{8} + \frac{\rho^3}{4}\right) - \frac{1}{8}\operatorname{arcsinh}\rho\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{-3\sqrt{2} + \operatorname{arcsinh} 1}{8} + \frac{5\sqrt{6} - \operatorname{arcsinh}\sqrt{2}}{8}\right]
\end{aligned}$$

(Per risolvere l'integrale usare la sostituzione $x = \sinh t$).

3. (i) Sia $D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$, $\varphi(x,y) = (x,y,y)$: chiaramente D è un dominio regolare in $\mathbf{R}^2$ e φ un'inclusione differenziabile di D in $\mathbf{R}^3$

e quindi $S = \varphi(D)$ è un elemento di superficie orientabile con bordo Γ dato da $\varphi(\partial D)$. Se ∂D è orientato in senso antiorario, l'orientamento indotto su Γ è dato dall'inclusione

$$\begin{cases} x = \cos\theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \end{cases}$$

e la normale equiorientata è $\nu^+ = (0, 1, -1)/\sqrt{2}$.
(ii) $\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = (-2, 0, 0)$, da cui segue che

$$\int_S \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot \nu^+ = 0\,.$$

D'altra parte,

$$\int_{\Gamma^+} \omega_F^1 = \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{2} \sin^2\theta - \sqrt{2} \cos^2\theta\right] d\theta = 0$$

dunque il teorema di Stokes è verificato.

4. (i) $\partial_y(5/x) = \partial_y(1/x) = 0$ e dunque ω è chiusa (ed essendo A stellato, ω è anche esatta: una primitiva è chiaramente data da $f(x, y) = \log(x^5/y)$).
(ii) $\int_{\sigma(x,y)} \omega = \log(x^5/y) =: f(x, y)$.
(iii) $\int_{\Gamma^+} \omega = f(2^{10}, 1) - f(2, 1) = 45 \log 2$.