Prova scritta di AM3 del 7/6/2004 – (II Esonero)

- **Per ottenere la sufficienza è necessario (ma non sufficiente) svolgere almeno due tra gli esercizi della Parte I ed almeno uno della Parte II.**
- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**

Parte I

1) Sia $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0,1] \, , y = x^2\}$. Calcolare

$$\int_\Gamma (1 + x^2 + 3y) \; d\ell \; .$$

2) Sia $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq 0 \; , 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ e sia $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \arctan y/x \; , (x,y) \in D\}$. Si calcoli

$$\int_S x^2 \; d\sigma \; .$$

3) (i) Sia S la superficie in $\mathbb{R}^3$ data da $S := \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \cap \{z = y\}$. Si mostri che S è una superficie elementare con bordo ed orientabile; se ne descriva il bordo; si trovi una normale ν^+ ad S ed un orientamento su Γ in modo tale che (Γ^+, ν^+) siano equiorientati (ovvero verifichino la "regola della mano destra").
(ii) Enunciare il teorema di Stokes per superfici in $\mathbb{R}^3$ con bordo e lo si verifichi esplicitamente nel caso di S e Γ come al punto precedente per il campo vettoriale $F := \big(y + z, z + x, x - y\big)$.

4) Si consideri la seguente 1–forma su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$: $\omega = 5\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$.
(i) Dire se ω è chiusa su A.
(ii) Sia $\sigma(x,y)$ il segmento orientato che va da $(1,1)$ a $(x,y) \in A$. Calcolare

$$\int_{\sigma(x,y)} \omega \; .$$

(iii) Calcolare $\int_{\Gamma^+} \omega$ dove Γ^+ è una qualunque curva in A che va da $(2,1)$ a $(2^{10}, 1)$.

Parte II

5) Si enunci e si dia una sintesi della dimostrazione del teorema sul calcolo degli integrali iterati per funzioni continue su insiemi normali in $\mathbb{R}^2$.

6) Si dimostri che l'integrale superficiale non dipende dalla parametrizzazione della superficie.