Soluzioni prova scritta di AM3 del 14/4/2004 – (I Esonero)

1) L'omogenea associata ha soluzione $u_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.
Cerco una soluzione particolare della non omogenea

$$\bar{u}(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}$$

e con la variazione delle costanti arbitrarie ottengo

$$\begin{aligned} c_2(t) &= -\frac{1}{4}\int \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+e^t}\,dt \\ &= -\frac{1}{4}e^t - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}\log(1+e^t) \end{aligned}$$

e

$$c_1(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\log(1+e^t) + \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^{-2t}}{8}.$$

Quindi la soluzione generale del problema è:

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{te^t}{2} - \frac{e^t}{2}\log(1+e^t) + \frac{1}{4} - \frac{e^{-t}}{8} - \frac{1}{4} - \frac{te^{-t}}{4} + \frac{e^{-t}}{2}\log(1+e^t)$$

cioè

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{te^t}{2} - \frac{e^t}{2}\log(1+e^t) - \frac{e^{-t}}{8} - \frac{te^{-t}}{4} + \frac{e^{-t}}{2}\log(1+e^t).$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha:

$$c_1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\log 2 \qquad\qquad c_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

e dunque la soluzione del problema di Cauchy è:

$$u(t) = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\log 2\right)e^t - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2\right)e^{-t} + \frac{te^t}{2} - \frac{e^t}{2}\log(1+e^t) - \frac{e^{-t}}{8} - \frac{te^{-t}}{4} + \frac{e^{-t}}{2}\log(1+e^t).$$

2) Ponendo

$$x(t) = \frac{y(t)}{t}$$

si ha l'equazione per $x(t)$:

$$\frac{x'(t)}{\sinh x} = \frac{1}{t}$$

che è un'equazione a variabili separabili.
Integrando si ottiene
$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=tc \qquad c\in\mathbb{R}.$$
Tornando alla soluzione y si ha
$$e^{\frac{y}{t}}=\frac{k+t}{k-t} \qquad k\in\mathbb{R}.$$
Dunque
$$\frac{y}{t}=\log\frac{k+t}{k-t}$$
da cui segue che
$$y(t)=t\log\frac{k+t}{k-t}.$$
Imponendo le condizioni iniziali si ha
$$y(t)=t\log\frac{2+t}{2-t}.$$

3) Il gradiente di f si annulla solo nell'origine che è un punto di flesso. Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange studiamo i punti critici di
$$H(x,y,z,t,\lambda)=xt-yz-\lambda(x^2+y^2+z^2+t^2-1).$$
Le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} t-2\lambda x=0\\ z+2\lambda y=0\\ y+2\lambda z=0\\ x-2\lambda t=0\\ x^2+y^2+z^2+t^2-1=0\end{cases}$$
sono i punti del tipo
$$\begin{cases} x=t\\ y=-z\\ 2x^2+2y^2=1\end{cases}$$
su cui la funzione è costantemente uguale a $\frac{1}{2}$, e quelli del tipo
$$\begin{cases} x=-t\\ y=z\\ 2x^2+2y^2=1\end{cases}$$
su cui la funzione è costantemente uguale a $-\frac{1}{2}$.
Quindi $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ sono rispettivamente il massimo ed il minimo.

4) La matrice Jacobiana $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile con inversa $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$. Dunque la funzione f è invertibile in un intorno dell'origine. La matrice $I - Tf'(x)$ è data da

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{1+x_1} & -3x_2^2 \\ -\dfrac{x_2}{3} & -\dfrac{x_1}{3} \end{pmatrix} .$$

Assumendo che $|x_i| \le r \le 1/2$ si ha che

$$\Big|\frac{x_1}{1+x_1}\Big| + |3x_2^2| \le 2r + 3r = 5r \ , \qquad \Big|\frac{x_2}{3}\Big| + \Big|\frac{x_1}{3}\Big| \le \frac{2}{3}r \ .$$

Fissando la norma $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ in $\mathbb{R}^2$ e la relativa norma matriciale si ha che $\|T\| = 1$ e che, se definiamo $r := 1/10$,

$$\sup_{|x|\le r} \Big\| I - Tf'(x) \Big\| \le 5r = \frac{1}{2} \ ,$$

e dunque la funzione inversa di f è definita sul quadrato $\{|y| \le \rho\}$ con $\rho := r/(2\|T\|) = 1/20$.