**Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM220

**27 Marzo 2012**

**A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia**

**Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia**

TUTORATO 5

1. Calcolare massimo e minimo di $f(x,y) = x - y$ in

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 2y^2 = 1 \quad 0 \leq x \leq 3\}$$

*Soluzione:*
Per prima cosa si osservi che $E$ è compatto perchè chiuso e limitato e dunque per il teorema di Weierstrass la funzione $f$ assumerà massimo e minimo su $E$. Essendo $E = \partial E$ questi punti possono essere trovati tramite il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = -4\lambda y \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Poichè $x, y \neq 0$(in quanto $(0,y) \notin E$ e $(1,0)$ non soddisfa il sistema) si trovano i punti $P_1(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $P_2(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, ma $P_2$ non è in $E$ quindi non lo consideriamo. Per lo studio dei massimi e dei minimi dobbiamo considerare anche gli estremi di $E$ cioè $Q_1 = (3,2)$ e $Q_2 = (3,-2)$ e andando a calcolare la funzione nei tre punti otteniamo che $max_E\ f = 5$ ed è assunto in $Q_2$ mentre $min_E f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed è assunto in $P_1$.

2. Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y \geq 2 \ \ e \ \ x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ e $f(x,y) = e^{xy}$, calcolare massimi e minimi di $f$ su $E$.
*Soluzione:*
Noitiamo che $E$ è compatto dunque essendo $f$ continua abbiamo che per Weiestrass $f$ deve assumere massimo e minimo in $E$ e questi possono essere all'interno o sulla frontiera. Calcoliamo quindi il gradiente di $f$:

$$\nabla f = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Esso si annulla solo in $(0,0)$ che non appartiene all'insieme $E$ e dunque non vi sono massimi o minimi liberi. I punti di massimo e minimo saranno quindi sulla frontiera. Distinguiamo tre parti della frontiera $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y = 2 \quad 0 \leq x \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 = 4 \ \ 0 \leq x \leq 2\} \cup (0,1), (2,0)$. Applichiamo ora il teorema dei moltiplicatori di Lagrange ai primi due sottoinsiemi della frontiera:

$$\begin{cases} ye^{xy} = \lambda \\ xe^{xy} = 2\lambda \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Da cui otteniamo $P_1(1, \frac{1}{2})$.

$$\begin{cases} ye^{xy} = 2\lambda x \\ xe^{xy} = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

Da cui otteniamo i punti $P_2(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $P_3(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $P_4(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $P_5(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, ma solo $P_2 \in E$. Infine dobbiamo considerare i punti $P_6(0,1)$ e $P_7(2,0)$. Valutando la funzione nei vari punti otteniamo che $max_E f = e$ ed è assunto in $P_2$ mentre $min_E f = 1$ ed è assunto in $P_6$ e $P_7$.

3. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita in questo modo: $F(x,y) = \sin xy - \cos x + e^y$, provare che esistono $\rho, r > 0$ e $g \in C(B_r(0,0), B_\rho(0)))$ tali che $F(x, g(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r(0)$ e fornire una stima di $\rho$ e $r$.
   *Soulzione:*
   $F$ è di classe $C^2$ in un intorno dell'origine e inoltre

   - $F(0,0) = 0$,
   - $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = |xcos(xy) + e^y|$ che calcolato in $(0,0)$ è 1.

   Per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r(0,0), B_\rho(0)))$ tali che $F(x, g(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r(0)$. Supponiamo $r, \rho < 1$ e abbiamo:

   $$|F(x,0)| = |1 - \cos x| \leq \frac{x^2}{2} \leq \frac{r^2}{2} \leq \frac{r}{2}$$

   Dunque posto $T = (\frac{\partial F}{\partial y}(0,0))^{-1} = 1$, si ha:

   $$\sup_{x \in B_r(0)} |F(x,0)| \leq \frac{r}{2} \leq \frac{\rho}{2}$$

   Quindi basta prendere $r \leq \rho$,inoltre

   $$|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)| = |1 - x\cos xy - e^y| \leq |1 - e^y| + |x \cos xy| \leq 3|y| + |x| \leq 3\rho + r \leq 4\rho$$

   Quindi:

   $$\sup_{(x,y) \in B_r(0) \times B_\rho(0)} |1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)| \leq 4\rho \leq \frac{1}{2}$$

   e si può prendere $\rho = \leq \frac{1}{8}$ e quindi $r \leq \frac{1}{8}$

4. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq e^x\}$ calcolare

   $$\int_A xydxdy$$

   *Soulzione:*
   Osserviamo che $A$ è la regione di piano compresa tra le rette di equazione $x = 0$ , $x = 1$ , $y = 1$ e il grafico della funzione $y = e^x$, dunque è normale rispetto alla variabile $x$ e quindi per il torema di *Fubini* si ha:

   $$\int_A xydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{e^x} xydxdy = \int_0^1 dx[\frac{xy^2}{2}]_0^{e^x} =$$

   $$\int_0^1 \frac{xe^{2x}}{2} = [\frac{xe^2x}{4}]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{4}dx = \frac{e^2}{4} - [\frac{e^{2x}}{8}]_0^1$$

5. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \;\; x+y \geq 2\}$ calcolare
$$\int_A y^3 dxdy$$
*Soulzione:*
A è la regione di piano delimitata dalla circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 e la retta di equazione $x+y=2$. Notiamo che $A = B \setminus C$ con $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, \; x \geq 0, y \geq 0\}$ ( normale) e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y \leq 2, \; x \geq 0, y \geq 0\}$ (normale ). Passiamo ora a coordinate polari per il primo insieme:
$$\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$
$$\Phi^{-1}(B) = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,+\pi] : \rho^2 \leq 1, \rho\sin\theta \geq 0, \rho\sin\theta \geq 0\} =$$
$$= \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,+\pi] : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$
Dunque essendo il determinante dello jacobiano pari a $\rho$ si ha che:
$$\int_A y^3 dxdy = \int_B y^3 dxdy - \int_C y^3 dxdy = \int_{\Phi^{-1}(B)} \rho^4 \sin^3\theta d\rho d\theta - \int_0^2 dx \int_0^{2-x} y^3 dy =$$
$$= \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta - \int_0^2 dx [\frac{y^4}{4}]_0^{2-x} = [\frac{\rho^5}{5}]_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta) d\theta - \int_0^2 \frac{(2-x)^4}{4} dx =$$
$$= \frac{32}{5}[\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\frac{(x-2)^5}{5}]_0^2 = \frac{64}{15} - \frac{8}{5} = \frac{8}{3}$$

6. Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq \sin^2 z, z \in [0,\pi]\}$. Calcolarne il volume.
*Soulzione:*
Passando a coordinate cilindriche si ha che $(x,y,z) = \Phi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)$ e $\Phi^{-1}(A) = \{(\rho,\theta,t) \in [0,+\infty) \times [-\pi,+\pi] \times \mathbb{R} : \rho \leq \sin t, \quad t \in [0,\pi]\}$ dunque essendo il determinante della matrice jacobiana pari a $\rho$ si ha:
$$Vol(A) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} dt \int_0^{\sin t} \rho d\rho = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{2} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} dt = \pi[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$