Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

13 Marzo 2012

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia

Tutorato 4

1. Esercizio 7.12 Determinare i valori massimi e minimi assunti dal volume di un parallelepipedo(in $\mathbb{R}^3$) di superficie totale assegnata.

   Soluzione
   La funzione che esprime il volume di un parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$ è

   $$f(x,y,z) = xyz$$

   e $f \geq 0$ inoltre il vincolo della superficie laterale è

   $$E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi = yz + xz + xy - M = 0 \ \ x,y,z > 0\}$$

   Cerchiamo i minimi e massimi assoluti: $\nabla f(x,y,z) = (zy, zx, xy) = (0,0,0)$. Ma questo accade se e solo se almeno due delle coordinate valgono zero quindi in punti che non appartengono ad E_0. Dunque si ha che i massimi e i minimi (se ci sono in quanto E_0 non è compatto)sono assunti sulla frontiera di E_0.
   Poichè E_0 non è compatto prima di applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange facciamo alcune osservazioni ; prendendo in considerazione la chiusura di E_0 si ha che il minimo di f che è zero viene raggiunto al bordo in quanto $f(0,y,z) = f(x,y,0) = f(x,0,z) = 0 \ \ \forall x,y,z \in \overline{E_0}$, inoltre notiamo che questo è l' $inf \ f$ in E_0 perchè prendendo una successione tale che $(\sqrt{M}, \sqrt{M} - \frac{2M}{\sqrt{M}(n\sqrt{M}+1)}, \frac{1}{n}) \to (\sqrt{M}, \sqrt{M}, 0) \in \overline{E_0}$ si raggiunge tale valore. Per quanto riguarda il massimo osserviamo che essendo E_0 non limitato potrebbe non essere assunto in un punto $(x,y,z) \ \ t.c. \ \ x,y,z < \infty$. Osserviamo però che essendo $yz + xz + xy = M$ e $x,y,z > 0$ si ha che $xy < M$ e $zy < M$ e $xz < M$ quindi $x^2y^2z^2 \leq M^3$ quindi $xyz \leq M^{\frac{3}{2}}$ cioè f è limitata sul vincolo e dunque questo esclude che il $supf = \infty$. Applichiamo dunque il teorema dei moltiplicatori di Lagrange:

   Siano $\lambda, x, y, z \neq 0$(altrimenti ritroviamo il minimo di f):

   $$\nabla\Phi = (z+y, z+x, y+x)$$

   $$\begin{cases} yz = \lambda(z+y) \\ xz = \lambda(z+x) \\ xy = \lambda(y+x) \\ yz + xz + xy - M = 0 \end{cases}$$

   $$\frac{z+y}{zy} = \frac{z+x}{zx} \Longrightarrow zx + xy = zy + xy \Longrightarrow zx = zy \Longrightarrow x = y$$

   $$\frac{z+x}{zx} = \frac{y+x}{yx} \Longrightarrow zy + xy = zy + xz \Longrightarrow xy = xz \Longrightarrow z = y$$

   $$\begin{cases} x = y = z \\ yz + xz + xy - M = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 = M \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{M}{3}}$$

Il punto cercato è $P = (\sqrt{\frac{M}{3}}, \sqrt{\frac{M}{3}}, \sqrt{\frac{M}{3}})$. E $f(P) = \frac{M}{3}\sqrt{\frac{M}{3}}$ che è il massimo di f.

2. Esercizio 7.13 Trovare quale triangolo di perimetro assegnato ha area massima utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
   Soluzione
   Ricordando la formula di Erone per cui l'area di un triangolo di lati x, y, z e perimetro $2p$ è $\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ si ha che $f(x,y,z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ e il vincolo su cui studiare massimi e minimi è $E = \{x+y+z = 2p | \; x,y,z > 0\}$.
   Studiamo il gradiente: $\nabla f = (\frac{-p(p-y)(p-z)}{\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}}, \frac{-p(p-x)(p-z)}{\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}}, \frac{-p(p-y)(p-x)}{\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}})$ e $\nabla f(x,y,z) = 0$ se e solo se $x = y = z = p$ cioè nel punto (p,p,p) che non appartiene al vincolo. Per trovare massimi e minimi osserviamo che il vincolo è limitato ma non chiuso. Consideriamo la chiusura di E e possiamo applicare il teorema di Weierstrass che ci assicura la presenza di massimi e minimi in E, i quali non essendo nell'interno (per lo studio del gradiente) saranno sulla frontiera di $\overline{E}$. Si ha che $f \geq 0$ inoltre il valore 0 viene assunto nei punti di $\overline{E}$ dove almeno due delle coordinate sono zero. Dunque in $\overline{E}$ f ha come minimo 0 che risulta essere un $inf f$ su E ,basta prendere $(x_n, y_n, z_n) = (\frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}, p - \frac{2}{n})$ Applichiamo dunque il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con $\lambda \neq 0$ e $x, y, z \neq p$ (per quanto visto prima):
   $$\begin{cases} \frac{-p(p-y)(p-z)}{\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}} = \lambda \\ \frac{-p(p-x)(p-z)}{\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}} = \lambda \\ \frac{-p(p-y)(p-x)}{\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}} = \lambda \\ x+y+z = 2p \end{cases}$$
   Da cui ricaviamo
   $$-p(p-y)(p-z) = -p(p-y)(p-x)$$
   e
   $$-p(p-y)(p-z) = -p(p-x)(p-z)$$
   cioè
   $x = y = z = \frac{2p}{3}$. Quindi il massimo è in $(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}) \in E$ dove f vale $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

3. Esercizio 7.14 Si discutano i massimi e i minimi relativi e assoluti(qualora esistano) della funzione $f(x,y) = xy^2(x+y-1)$ nel dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \geq 1\}$
   Soluzione
   Calcoliamo per prima cosa il gradiente di f per trovare i massimi e i minimi liberi di f: $\nabla f = (y^2(x+y-1) + xy^2, 2xy(x+y-1) + xy^2)$. Si ha che $\nabla f = 0$ se e solo se
   $$\begin{cases} y^2(x+y-1) + xy^2 = 0 \\ 2xy(x+y-1) + xy^2 = 0 \end{cases}$$

$$y^2(x+y-1) = 2xy(x+y-1)$$
$$y^2 - 2xy = 0$$
$$y(y-2x) = 0$$

Quindi nel caso $y = 0$ si ha che $(x, 0)\quad \forall x \in \mathbb{R}$ è un punto critico e per studiarne la natura calcoliamo in primo luogo la matrice hessiana:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2y^2 & 2y(x+y-1)+y^2+2xy \\ 2y(x+y-1)+y^2+2xy & 2x(x+y-1)+4xy \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{pmatrix}$$

I punti $(x, 0)$ sono punti critici degeneri e per determinare se sono massimi o minimi consideriamo il segno di f nel semipiano $\{x + y \geq 1\}$. Si ha che nel semipiano i punti $(x, 0)$ sono tali che $x > 0$ la f è positiva dunque poichè nel punti $(x, 0)$ si annulla, questi saranno punti di minimo.
Nel caso $y = 2x$ si ha:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2xy(x+y-1) + xy^2 = 0 \end{cases}$$

$$4x^2(3x-1) + 4x^3 = 0$$
$$x^2(16x - 4) = 0$$

Se $x = 0$ abbiamo il punto $(0, 0)$ che non consideriamo in quanto non è in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \geq 1\}$.
Se $x = \frac{1}{4}$ abbiamo il punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ che comunque non è in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \geq 1\}$. Osserviamo che anche su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 1\}$ la funzione è nulla, inoltre per $x < 0$ la funzione è negativa dunque $(x, 1 - x)$ sono di massimo relativo mentre per $x > 0$ la funzione è positiva e dunque $(x, 1-x)$ sono punti di minimo relativo. Poichè il vincolo non è compatto il massimo potrebbe non essere assunto ma essere un sup. Osserviamo infatti che tale sup è $+\infty$ in quanto considerando una qualsiasi successione interna al vincolo (x_n, y_n) con $x_n \to \infty$ e $y_n \equiv k$,o viceversa, la $f(x_n, y_n) \to +\infty$. Dunque i minimi relativi sono assunti in $(x, 0)$ e $(x, 1 - x)$ con $x > 0$, i massimi relativi sono in $(x, 0)$ e $(x, 1 - x)$ con $x < 0$ mentre il massimo assoluto non c'è ma si ha $sup f = \infty$. Si noti che non abbiamo utilizzato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange in quanto all'interno abbiamo trovato massimi e minimi relativi con lo studio del gradiente di f, mentre sulla frontiera che è $\{x + y = 1\}$ f è nulla.

4. Esercizio 7.15 Si trovino il massimo e il minimo di $f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ sulla sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ t.c. \ |x| \leq 1\}$
Soluzione

Cerchiamo per prima cosa il massimo e il minimo assoluti in B_n. Calcoliamo il gradiente di f: $\nabla f = (\prod_{j \neq 1} x_j, ..., \prod_{j \neq n} x_j)$, dunque $\nabla f = 0$ se e solo se almeno due delle $x_i = 0$, ma in questi casi $f(x) = 0$ e 0 non è nè un massimo nè un minimo della funzione in B_n in quanto in essa f assume valori sia negativi che positivi. Poichè il vincolo è compatto e f è continua abbiamo che per Weierstrass esistono massimo e minimo e quindi, non essendo nell'interno per quanto visto finora, devono essere assunti sulla frontiera di B_n che è S^{n-1}. Applichiamo dunque il metodo dei moltoplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \prod_{i\neq 1} x_i = 2\lambda x_1 \\ \prod_{i\neq 2} x_i = 2\lambda x_2 \\ . \\ . \\ . \\ \prod_{i\neq n} x_i = 2\lambda x_n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \end{cases}$$

Esculdendo $\lambda = 0$ e $x_i = 0$(torneremmo infatti al caso in cui $f = 0$) si ha che:

$$x_j \prod_{i\neq j} x_i = 2\lambda x_j^2 \longrightarrow f(x) = 2\lambda x_j^2 \;\; \forall j = 1, ..., n$$

$$x_j^2 = x_i^2 \;\; \forall i, j$$

Inserendo quanto trovato nel vincolo:

$$n x_i^2 = 1 \longrightarrow |x_i| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Quindi il massimo in B_n è $(\frac{1}{\sqrt{n}})^n$ e il minimo è $-(\frac{1}{\sqrt{n}})^n$.

5. Esercizio 7.16 Sia $M > 0$. Studiare i punti critici di $f = \prod_{i=1,..,n} x_i$ su $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i x_i = M\}$
Soluzione
Distinguiamo il caso $n = 2$ dal caso $n \geq 2$. Nel caso $n = 2$ si possono studiare i massimi e i minimi della funzione $f(x) = x(M - x)$.
Passiamo ora al caso $n \geq 2$. Per prima cosa calcoliamo $\nabla f = (\prod_{i\neq 1} x_i, ..., \prod_{i\neq n} x_i)$, si ha che $\nabla f = (0, ..., 0)$ se e solo se due o più coordinate sono zero, inoltre in tali punti ho $f = 0$ e studiando l'hessiana si osserva che sono punti di sella. Osserviamo che il vincolo è chiuso ma non limitato dunque non compatto, per questo dobbiamo vedere cosa succede nel caso in cui una o più delle variabili non sia finita. Considerando la successione :

$$\begin{cases} \overline{x}_n = (M + 2n, -n, -n, M + 2n, -n, -n, ..., M + 2n, -n, -n) \in E \quad n = 3k \\ \overline{x}_n = (M + 2n, -n, -n, ..., M + 2n, -n, -n, M - 1 + 2n, -n, -n, 1) \in E \quad n = 3k + 1 \\ \overline{x}_n = (M + 2n, -n, -n, ..., M + 2n, -n, -n, M - 2 + 2n, -n, -n, 1, 1) \in E \quad n = 3k + 2 \end{cases}$$

si ha che $f(\overline{x}) = \infty$ Ponendo invece:

$$\begin{cases} \overline{x}_n = (M + n, -n, -2n, M + n, -n, -2n, ..., M + n, -n, -2n) \in E \quad n = 3k \\ \overline{x}_n = (M + n, -n, -2n, M + n, -n, -2n, ..., M - 1 + n, -n, -2n, 1) \in E \quad n = 3k + 1 \\ \overline{x}_n = (M + n, -n, -2n, M + n, -n, -2n, ..., M - 2 + n, -n, -2n, 1, 1) \in E \quad n = 3k + 2 \end{cases}$$

$f(\overline{x}) = -\infty$. Dunque $supf = \infty$ e $inff = -\infty$. Applichiamo ora il teorema dei moltiplicatori di Lagrange con $x_i \neq 0 \; \forall i = 1, ..., n$ per trovare massimi o minimi relativi :

$$\begin{cases} \prod_{i \neq 1} x_i = \lambda \\ \prod_{i \neq 2} x_i = \lambda \\ . \\ . \\ . \\ \prod_{i \neq n} x_i = \lambda \\ \sum x_i = M \end{cases}$$

Da cui $x_i = x_j \quad \forall i, j = 1, ..., n$, ed essendo $M = \sum x_i = nx_1$ ho che $x_1 = ... = x_n = \frac{M}{n}$ Con uno studio più approfondito si vede che questo punto è di massimo locale.