Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

13 Marzo 2012

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia

TUTORATI 3

Esercizio 7.18

Sia $\varepsilon \geq 0$ e $f(x) \equiv x + \varepsilon g(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ dove $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. Trovare $\varepsilon_0 > 0$ tale che f sia invertibile (con inversa C^1) su D.

Soluzione:

Innanzitutto, giusto per avere un'idea del problema che abbiamo davanti, il fatto che f sia effettivamente invertibile deriva dal fatto che x lo è e dall'arbitrarietà di ε.

Consideriamo dunque $F(y, x, \varepsilon) = y + \varepsilon g(y) - x$. Se ora applichiamo il teorema della funzione implicita a F in $(y_0, \varepsilon_0, x_0) \equiv (0, 0, 0)$ considerando ε come $(n+1)$-esima componente di x troveremo una $h(x, \varepsilon)$ tale che si abbia $F(h(x, \varepsilon), x, \varepsilon) = 0$ in un intorno di $(y_0, \varepsilon_0, x_0) \equiv (0, 0, 0)$.

L'intorno sarà definito come $Y_0 \times X_0 \times \Theta_0$ con:

$$Y_0 \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq \rho\}$$

$$X_0 \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$$

$$\Theta_0 \equiv \{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'\}$$

dove ε' sarà (grazie a una notazione spiacevole quanto necessaria) la ε_0 richiesta dall'esercizio. Notiamo inoltre che poichè noi vogliamo la nostra f invertibile su tutto D si ha $\rho \equiv 1$.

Applichiamo il Teorema della Funzione Implicita: dal fatto che g è C^1 si ha che F è C^1, ed inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y, x, \varepsilon) = \mathbb{I}_n - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial y}(y), \quad T^{-1} = \frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0, \varepsilon_0) = \mathbb{I}, T = \mathbb{I}, \|T\| = 1$$

dunque esiste un intorno in cui esiste $h(x)$. Cerchiamo dunque ε'. Usiamo le solite stime:

$$\sup_{X_0 \times \Theta_0} \|F(y_0, \varepsilon, x)\| = \sup_{X_0 \times \Theta_0} \|\varepsilon g(0) - x\| \leq \varepsilon' |g(0)| + r \leq \theta \frac{\rho}{\|T\|} = \theta$$

$$\sup_{Y_0 \times X_0 \times \Theta_0} \left\| \mathbb{I} - T \frac{\partial F}{\partial y}(y, x, \varepsilon) \right\| = \sup_{Y_0 \times X_0 \times \Theta_0} \left\| \mathbb{I} - \left[\mathbb{I} - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial y}(y) \right] \right\| =$$

$$= \sup_{Y_0 \times X_0 \times \Theta_0} \varepsilon \left\| \frac{\partial g}{\partial y}(y) \right\| \leq \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_\infty \leq 1 - \theta$$

Da cui dunque si deduce che $\forall\ 0 < r < \theta < 1$ si ha che se $\varepsilon' = \inf \left\{ \frac{\theta - r}{|g(0)|}, \frac{1-\theta}{\left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_\infty} \right\}$ allora f è invertibile.