Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

8 Maggio 2012

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia

TUTORATO 10

Calcolare i seguenti integrali superficiali :

1. $\int_\Sigma \frac{1}{z^4} d\sigma$ in $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\}$
   Soluzione:
   La superficie Σ é il grafico della funzione $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ che é definita su $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$ dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ é definta da $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = (x,y,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$. Quindi

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4} d\sigma = \int_K (x^2+y^2)^2 ||N(x,y)|| dxdy,$$

   dove $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) = (-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1) = (\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, 1)$
   $||N(x,y)|| = \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}$

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4} d\sigma = \int_K (x^2+y^2)^2 ||N(x,y)|| dxdy = \int_K (x^2+y^2)\sqrt{1+(x^2+y^2)^2} dxdy$$

   Passiamo ora a coordinate polari nel piano con

$$(x,y) \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

   Quindi si ha $K = \Phi(\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}) = \Phi(K')$

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4} d\sigma = \int_K (x^2+y^2)\sqrt{1+(x^2+y^2)^2} dxdy = \int_{K'} \rho^3 \sqrt{1+\rho^4} d\rho d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{2}}^1 d\rho \rho^3 \sqrt{1+\rho^4} = \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - \frac{17}{64}\sqrt{17})$$

2. $\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} d\sigma$ in
   $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x + \frac{\sqrt{2}}{2} y^2, \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

Soluzione:
La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = x + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2$ dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq \sin x\}$$

e inoltre $\Sigma = \sigma(K)$ con $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = (x,y,x + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2)$.
Quindi si ha che

$$\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} d\sigma = \int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} ||N(x,y)|| dxdy$$

con $N(x,y) = (-1, -\sqrt{2}y, 1)$ e $||\sqrt{2}\sqrt{1+y^2}||$

$$\int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} ||N(x,y)|| dxdy = \sqrt{2} \int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dxdy.$$

Essendo $K = K_1 \cup K_2$ con

$$K_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, y \leq \sin x\}$$

$$K_2 = \{(x,y) : \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

si ha :

$$\sqrt{2} \int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dxdy = \sqrt{2} \int_{K_1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dxdy + \sqrt{2} \int_{K_2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dxdy =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dydx + \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dydx = \frac{3}{32}\sqrt{2}\pi^2$$

3. $\int_\Sigma z^2 d\sigma$ in $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = xy,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
Soluzione: La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = xy$ dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

.Inoltre $\Sigma = \sigma(K)$ con $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = (x,y,xy)$.
Quindi:

$$\int_\Sigma z^2 d\sigma = \int_K x^2y^2 ||N(x,y)|| =$$

con $N(x,y) = (-y, -x - 1)$ e $||N(x,y)|| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

$$= \int_K x^2y^2\sqrt{1+x^2+y^2} dxdy$$

Passando a coordinate polari nel piano ho che $(x,y) \in K \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$
Quindi si ha $K = \Phi(\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\}) = \Phi(K')$ dove

$$K' = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\}$$

Quindi si ha che

$$\int_K x^2y^2\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \int_{K'} \rho^5 \cos^2\theta \sin^2\theta \sqrt{1+\rho^2}d\rho d\theta =$$

$$= (\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta)(\int_0^1 \rho^5\sqrt{1+\rho^2}d\rho) = \frac{1}{420}(11\sqrt{2}-4)(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8})$$

4. $\int_\Sigma (x^2+y^2)d\sigma$, in $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \sqrt{x^2+y^2}, \ x^2+y^2 \le 1\}$
Soluzione:
La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$$

. É quindi la parte del semicono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ compresa fra il vertice $(0,0,0)$ e il piano $z = 1$.
Inoltre $\Sigma = \sigma(K)$ con $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = (x,y,\sqrt{x^2+y^2})$. Quindi

$$\int_\Sigma (x^2+y^2)d\sigma = \int_K (x^2+y^2)||N(x,y)||dxdy =$$

dove $N(x,y) = (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$ e $||N(x,y)|| = \sqrt{2}$
Quindi

$$= \int_K (x^2+y^2)||N(x,y)||dxdy = \sqrt{2}\int_K (x^2+y^2)dxdy$$

Passando in coordinate polari si ha $K = \Phi(\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}) = \Phi(K')$

$$= \sqrt{2}\int_K (x^2+y^2)dxdy = \sqrt{2}\int_{K'} \rho^3 d\rho d\theta = \sqrt{2}(\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^1 \rho^3 d\rho) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

5. $\int_\Sigma \frac{1}{4z+1}d\sigma$ $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2, x^2+y^2 \le 1\}$
Soluzione:
La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = x^2+y^2$ dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$$

É quindi la parte di paraboloide compresa tra l'origine e il piano $z = 1$.
Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$ do ve $\sigma(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$

Quindi :

$$\int_\Sigma \frac{d\sigma}{4z+1} = \int_K \frac{1}{1+4x^2+4y^2}||N(x,y)||dxdy = \int_K \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dxdy$$

Dove $N(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Passando in coordiante polari con $K' = \{(\rho, \theta) : \ 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\int_K \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dxdy = \int_{K'} \frac{\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}} = (\int_0^{2\pi} d\theta) \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}d\rho = \frac{\pi}{2}(\sqrt{5}-1)$$

6. Calcolare l'area della superficie (finestra di Viviani) il cui sostegno è

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0 \ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$$

Soluzione:
Diamo una rappresentazione parametrica della superficie utilizzando le coordinate cilindriche

$$\sigma(\rho, \theta) = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$$

Con $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, e $\rho \in [0, \cos\theta]$ Infatti da $\rho^2 + z^2 = 1$ tenendo conto che $z \geq 0$ si ha $z = \sqrt{1-\rho^2}$ con $0 \leq \rho \leq 1$. Inoltre da $\rho^2 - \rho\cos\theta \leq 0$ segue $\rho \leq \cos\theta$ cioè $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e di conseguenza $0 \leq \rho \leq \cos\theta$. Inoltre $||\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\rho}|| = \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2}}$. Quindi:

$$Area(S) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}|_0^{\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}]d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta = \pi-2$$