Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzione Esercizi di AM220

20 Febbraio 2012

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia

TUTORATO 1

1. Esercizio 6.5

   Si dimostri che se $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathbf{R}$ allora $\exists\, c > 0$ tale che $\|x\| = c|x|$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

   Soluzione: Sappiamo che $x \in \mathbf{R}$, dunque per la proprietà di omogeneità della norma:
   $$\|x\| = \|x \cdot 1\| = |x|\|1\|$$

2. Esercizio 6.6

   Si calcoli la norma $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{2,2}$ della matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   Soluzione: Sapendo che $\|\vec{x}\|_2 = |\vec{x}|$ $\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^2$ dobbiamo trovare
   $$\left\| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\| = \sup_{|\vec{x}|=1} \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} \right|$$

   Poichè ci troviamo nel caso $|\vec{x}| = 1$, si ha $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, dunque
   $$\left| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\cos\alpha + \sin\alpha \\ -2\sin\alpha \end{pmatrix} \right| =$$
   $$= \sqrt{(-\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (-2\sin\alpha)^2} = \sqrt{3 - (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} =$$
   $$= \sqrt{3 - \sqrt{5}\sin(2\alpha + \theta)} \leq \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$
   dove $\theta = \arctan 2$ e $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, quindi
   $$\left\| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

3. Esercizio 6.7

   (i) Dimostrare che per ogni matrice $A \in \mathrm{Mat}(n \,\mathrm{x}\, n)$, $\|A\| \geq \max|\lambda_i|$ dove il massimo è preso sugli n autovalori di A.

   (ii) Dimostrare che se $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, con $\lambda_i \in \mathbf{C}$, allora $\|A\| = \max|\lambda_i|$.

   (iii) Dimostrare che se U è una matrice reale ortogonale (cioè $U^T \equiv$ trasposta di $U{=}U^{-1}$), allora $\|U\| = 1$.

   (iv) Dimostrare che se A è (reale e) simmetrica allora $\|A\| = \max|\lambda_i|$ ($\equiv$ massimo modulo degli autovalori di A).

(v) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ dove $\varepsilon > 0$. Dimostrare che gli autovalori di A sono 0 e ε (e quindi A è diagonalizzabile) e che $\|A\| = \sqrt{1+\varepsilon^2} > 1$. Questo dimostra che anche se A è diagonalizzabile (ma non simmetrica) può accadere che $\|A\| > \max |\lambda_i|$.

Soluzione:

(i) Sia v autovettore; allora dato che

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$$

si ha

$$\|A\| \geq \frac{|Av|}{|v|} = \frac{|\lambda v|}{|v|} = |\lambda|$$

Essendo valido ciò $\forall \lambda_i$ con $i = 1, \ldots, n$, allora

$$\|A\| \geq \max_{i,\ldots,n} |\lambda_i|$$

(ii) Già sappiamo che $\|A\| \geq \max |\lambda_i|$, quindi basterà vedere la disuguaglianza opposta.
Notiamo che $Ax = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$ e $|\lambda_0| = \max |\lambda_i|$, ma allora

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x|=1} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^2 x_i^2} \leq \sup_{|x|=1} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \lambda_0^2 x_i^2} = |\lambda_0|$$

(iii)

$$|Ux|^2 = < Ux, Ux > = x^T U^T U x = x^T x = |x|^2$$

Poichè la norma è positiva si ha $|Ux| = |x|$ e quindi

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ux|}{|x|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|x|}{|x|} = 1$$

(iv) Se A è reale e simmetrica sappiamo che può essere diagonalizzata, quindi $B^T A B = D$ con D diagonale e B ortogonale, da cui $A = BDB^T$ e dunque

$$\|A\| = \|BDB^T\| \leq \|B\| \|D\| \|B^T\| = \|D\| = \max |\lambda_i|$$

4. Esercizio 6.32

Siano $\{a_k\}, \{A^{(k)}\}, \{B^{(k)}\}, \{x^{(k)}\}$ successioni in, rispettivamente, $\mathbf{R}$, $\mathrm{Mat}(n \,\mathrm{x}\, m)$, $\mathrm{Mat}(m \,\mathrm{x}\, p)$, $\mathbf{R}^p$ convergenti a, rispettivamente, a, A, B, x. Dimostrare che $a_k A^{(k)} B^{(k)} \to aAB$ e che $a_k A^{(k)} B^{(k)} x^{(k)} \to aABx$.

Soluzione:

$$\|a_k A^{(k)} B^{(k)} - aA^{(k)} B^{(k)} + aA^{(k)} B^{(k)} - aAB^{(k)} + aAB^{(k)} - aAB\| \leq$$

$$\leq \|a_k A^{(k)} B^{(k)} - aA^{(k)} B^{(k)}\| + \|aA^{(k)} B^{(k)} - aAB^{(k)}\| + \|aAB^{(k)} - aAB\| \leq$$

$$\leq |a_k - a| \|A^{(k)}B^{(k)}\| + \|A^{(k)} - A\| \|aB^{(k)}\| + \|B^{(k)} - B\| \|aA\| \leq$$
$$\leq \varepsilon' \|A^{(k)}B^{(k)}\| + \varepsilon'' \|aB^{(k)}\| + \varepsilon''' \|aA\|$$

Analogamente

$\|a_kA^{(k)}B^{(k)}x^{(k)} - aA^{(k)}B^{(k)}x^{(k)} + aA^{(k)}B^{(k)}x^{(k)} - aA^{(k)}B^{(k)}x + aA^{(k)}B^{(k)}x - aAB^{(k)}x +$

$+ aAB^{(k)}x - aABx\| \leq \varepsilon' \|A^{(k)}B^{(k)}x^{(k)}\| + \varepsilon'' \|aA^{(k)}B^{(k)}\| + \varepsilon''' \|aB^{(k)}x\| + \varepsilon'''' \|aAx\|$