II Esonero – 30/5/2012

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!* **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.
• **Attenzione:** *è obbligatorio svolgere il primo esercizio.*

Es 1 [Pt. 25] (i) Dare la definizione di convergenza puntuale e uniforme di una successione di funzioni $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fare un esempio di una successione di funzioni $\{f_n\}$ che converge puntualmente in $[0,1]$ ma non uniformemente.
(ii) Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ converge uniformemente ma non totalmente in $[-1,0]$.
(iii) Dare la definizione analitica di π e dimostrare che $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$.
(iv) Discutere la serie di Taylor–Maclaurin di $\log(1+x)$.
(v) Definire $\cosh z$ e calcolarne la parte reale e immaginaria ($z = x + iy$).

Es 2 [Pt. 25] (i) Studiare la convergenza (puntuale, uniforme e totale) della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\tanh x}} \ .$$

(ii) Sia $f_n(x) := n \operatorname{sen}(n\pi x)$ per $x \in [0, 1/n]$ e $f_n(x) = 0$ altrimenti. Calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni x.
Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ e $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
La succcessione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0,1]$? E in $[1/100, 1]$?

Es 3 [Pt. 24] Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri (al variare di α dove appare):

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 |\log x|^{\alpha} dx \ ; \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_1^{\infty} \tanh\Big(1 - \frac{1}{x}\Big) dx \ .$$

Es 4 [Pt 12] Calcolare il polinomio di Taylor di grado 10 in $x_0 = 0$ di $\operatorname{sen}(x^2 + x^8)$.

Es 5 [Pt 14] (i) Calcolare la parte reale e immaginaria di $\tanh 1/i$.
(ii) Trovare tutte le radici di $z^{16} = 1 + i$.
(iii) Risolvere l'equazione $3z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.