Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 120

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof.Luigi Chierchia

Tutori: Vincenzo Morinelli, Emanuele Padulano

Tutorato 26 Aprile 2012

Successioni e serie di funzioni

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = e^{-nx}$

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$

   (c) $f_n(x) = \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}$

   (d) $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$

   (e) $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}$

   (f) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{n^2 x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   (g) $f_n(x) = \arctan\left(n^2 - x\right)$

   (h) $f_n(x) = \int_{-nx^2}^{nx^2} e^{-t^2}dt$

   (i) $f_n(x) = \sin\left(\pi n x^2\right) e^{-nx^2}$

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti di potenze e discuterne il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} x^n$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^{10}}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n} x^n$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^n x^n$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n x^n$

3. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(nx)}{n^2}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(n^2 x\right) e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2}$

4. Calcolare la somma delle seguenti serie di potenze:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n+1}$

5. Sia $f_n(x) = \frac{\arctan \frac{x}{n}}{n}$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$,stabilire se $f_n(x)$ e $f_n'(x)$ convergono uniformemente e dire per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.

6. Calcolare:

(a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n \sin x \cos x}{n+x} dx$

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} dx$