Appendice C

Il campo complesso

C.1 I numeri complessi

Il campo complesso $\mathbb{C}$ è, per definizione, $(\mathbb{R}^2, +, *)$ ove le operazioni di somma e prodotto "complesso" sono definite come segue:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (SC)
- $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$ (PC)

Osservazione C.1 Si noti che, mentre la somma "complessa" coincide con la somma di $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale, il "prodotto complesso" $*$ è assai diverso sia dal prodotto scalare–vettore[1] sia dal prodotto scalare[2]. Infatti il prodotto complesso $*$ è una operazione binaria da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: ad una coppia di vettori z_1 e z_2 in $\mathbb{R}^2$ associa un terzo vettore z in $\mathbb{R}^2$.

Proposizione C.2 (i) *Il prodotto complesso è commutativo e associativo.*
(ii) *L'elemento neutro del prodotto complesso è* $1 := (1, 0)$.
(iii) *Se* $z = (x, y) \neq 0$ *il reciproco di* z*, denotato* z^{-1} *o* $1/z$ *è dato da*

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) .$$

Dimostrazione (i) La commutatività è ovvia. Per l'associatività dobbiamo verificare che

$$\Big((x_1, y_1) * (x_2, y_2) \Big) * (x_3, y_3) = (x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3) \Big) , \tag{C.1}$$

o anche, in vista della commutatività di $*$,

$$(x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3) \Big) = \Big((x_3, y_3) * (x_2, y_2) \Big) * (x_1, y_1) . \tag{C.2}$$

D'altra parte, dalla definizione di * si ha che

$$\begin{aligned} \Big((x_1, y_1) * (x_2, y_2) \Big) * (x_3, y_3) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) * (x_3, y_3) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 \, , \, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3) \, , \end{aligned}$$

[1] $\mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale con campo degli scalari $\mathbb{R}$ e il prodotto scalare–vettore è, come noto, definito da $ax := a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$ per ogni "scalare" $a \in \mathbb{R}$ ed ogni "vettore" $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

[2] Ossia, il prodotto che a $x \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}^2$ associa lo scalare $x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 \in \mathbb{R}$.

che è simmetrica in 1 e 3 (ossia scambiando gli indici 1 e 3 tra loro otteniamo lo stesso risultato) e dunque (C.2) (e quindi (C.1)) è verificata.

(ii) e (iii) si dimostrano tramite una semplice verifica diretta che segue immediatamente dalla definizione di $*$. ∎

- Il numero complesso $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ viene chiamato *unità immaginaria*: ha la fondamentale proprietà che $i * i =: i^2 = -1 = (-1, 0)$.
  Identificando $\mathbb{R}$ con il sottospazio di $\mathbb{C}$ dato da[3] $\mathbb{R} \times \{0\}$ si ritrova la notazione classica

  $$(x, y) = (x, 0) * (1, 0) + (y, 0) * (0, 1) =: (x, 0) * 1 + (y, 0) * i = x * 1 + y * i = x + iy \ ,$$

  dove, come è anche tradizione, il prodotto complesso $*$ non viene denotato esplicitamente[4].

- Il *complesso coniugato* di un numero complesso $z = x + iy$ è il numero complesso $\bar{z} := x - iy$; il *modulo* di un numero complesso $z = x + iy$ è dato dalla norma euclidea di z ossia da

  $$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \ .$$

  Si verifica immediatamente che

  $$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \ , \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}; \qquad \overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w} \ , \forall z, w \in \mathbb{C} \ .$$

- Si osservi che la convergenza (rispetto alla norma $|\cdot|$) di una successione di numeri complessi $z_k = x_k + iy_k$ al numero complesso $z = x + iy$, è *equivalente* alla convergenza (reale) di x_k a x e y_k a y. Dalla completezza di $\mathbb{R}$ segue, quindi, che $\mathbb{C}$ è un spazio normato completo.

- Molti risultati di analisi su $\mathbb{R}$ si trasportano *verbatim* su $\mathbb{C}$. Ad esempio:
  - la struttura topologica e metrica di $\mathbb{C}$ è la stessa di $\mathbb{R}^2$ (dotato della norma euclidea);
  - limiti di successioni di numeri complessi e $\lim\limits_{z \to z_o} f(z)$ con $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 punto nella chiusura di E;
  - convergenze assoluta di serie[5] e gli annessi criteri del rapporto[6] e della radice[7];

[3] Più precisamente, esiste una immersione naturale di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ data da

$$j : x \in \mathbb{R} \mapsto j(x) := (x, 0) \in \mathbb{C} \ .$$

Tale immersione è un isomorfismo tra $\mathbb{R}$ ed il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$ dato da $\mathbb{R} \times \{0\} = j(\mathbb{R})$: è tale immersione j che viene normalmente sottointesa.

[4] Ossia, la posto di $z * w$ si scrive semplicemente zw; $\underbrace{z * \cdots * z}_{n} = z^n$, etc.

[5] Studiare una serie in $\mathbb{C}$ significa studiare la successione delle "ridotte" $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n}$ con $z_k \in \mathbb{C}$.

[6] Se $|z_{n+1}|/|z_n| \to 0$ allora la serie $\sum z_n$ converge assolutamente.

[7] Se $\limsup\limits_{n\to\infty} |z_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ allora la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ converge assolutamente; se $\limsup\limits_{n\to\infty} |z_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ allora $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ non converge.

– definizione di funzioni continue ed uniformemente continue da[8] $E \subseteq \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ e relativo teorema sulla convergenza uniforme di successioni di funzioni continue ad una funzione continua;

– convergenza assoluta e totale di serie di potenze[9] in $\mathbb{C}$ e raggio (e relativo disco) di convergenza[10].

Anche il concetto di derivata si estende *verbatim*, ma le conseguenze di tale estensione sono assai profonde (cfr., ad esempio, l'Osservazione C.4): f si dice **derivabile** in z_0 punto interno di E se esiste il limite del rapporto incrementale $(f(z)-f(z_0))/(z-z_0)$ per $z \to z_0$, tale limite, se esiste, è la **derivata** di f in z_0 e si denota con $f'(z_0)$ o con $\frac{df}{dz}(z_0)$:

$$f'(z_0) := \frac{df}{dz}(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \ . \tag{C.3}$$

Esempio C.3 (i) Sia $f(z)=z^n$ (e $E=\mathbb{C}$). Per $n=0,1$ si ha, ovviamente, $f'(z)=0,1$. Sia $n \geq 2$. Esattamente come nel caso reale, chiamando h il numero complesso $z-z_0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} &= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} z_0^j \, h^{n-j}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} z_0^j \, h^{n-j-1} = n z_0^{n-1} \ . \end{aligned} \tag{C.4}$$

Quindi z^n è derivabile (in senso complesso) e la sua derivata (nel punto generico z) è (come nel caso reale) nz^{n-1}.
(ii) Un esempio di funzione complessa di variabile complessa non derivabile è, invece dato da $f(z)=\bar z$. Infatti, osserviamo che se f è derivabile in z_0, allora comunque si scelga una successione di numeri complessi $z_n \to z_0$ (ossia tali che $|z_n - z_0| \to 0$) si ha $\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n - z_0} \to f'(z_0)$. Fissiamo z_0 e consideriamo le successioni $z_n := z_0 + \frac{1}{n}$ e $w_n := z_0 + i\frac{1}{n}$. Si verifica immediatamente che $z_n \to z_0$, $w_n \to z_0$ e che

$$\frac{\bar z_n - \bar z_0}{z_n - z_0} = 1 \ , \qquad \frac{\bar w_n - \bar z_0}{w_n - z_0} = -1 \ ,$$

da questo segue che la funzione $z \to \bar z$ non è derivabile in alcun punto.

Come nel caso reale, *una serie di potenze definisce una funzione derivabile un numero arbitrario di volte all'interno del suo disco di convergenza e le derivate di tale funzione si ottengono derivando termine a termine la serie di potenze.*

---

[8] Esplicitamente: f si dice **continua** in $z_0 \in E$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \quad |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon \ , \quad \forall\, z \in E \text{ con } |z-z_0| < \delta \ ; \tag{$*$}$$

f è continua in E, $f \in C(E,\mathbb{C})$, se f è continua in ogni punto $z_0 \in E$; f è **uniformemente continua** in E se la $(*)$ vale per ogni $z_0 \in E$ (e la scelta di δ è indipendente da z_0);

[9] Una serie di potenze in $\mathbb{C}$ è il limite, qualora esista, della successione delle ridotte $\sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k$ con a_k, z, z_0 numeri complessi.

[10] La serie $\sum a_n (z-z_0)^n$ converge assolutamente se $z \in \{|z-z_0| < R\}$ (:= disco di convergenza) e non converge se $|z-z_0| > R$ dove $R = \big(\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}\big)^{-1}$ (:= raggio di convergenza).

Osservazione C.4 Di natura diversa è il seguente risultato (che *non* vale per funzioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

Una funzione $f : E \to \mathbb{C}$ con E aperto di $\mathbb{C}$ tale che ammetta derivata in ogni punto di E è rappresentabile tramite serie di potenze: per ogni $z_0 \in E$ esistono $a_n \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ per ogni $|z - z_0| < R$ con $R \geq \operatorname{dist}(z_0, \partial E)$ raggio di convergenza della serie di potenze $\sum a_n(z - z_0)^n$.

In particolare dall'esistenza del limite del rapporto incrementale in E segue che la funzione f è derivabile un numero arbitrario di volte e gli a_n coincidono (come nella normale teoria relativa alla formula di Taylor) con $f^{(n)}(z_0)/n!$.

C.2 Esponenziale complesso e funzioni trigonometriche

Definiamo per $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ . \tag{C.5}$$

Poiché $\limsup \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} = 0$ si ha che *il raggio di convergenza della serie esponenziale* (C.5) è *infinito*.

È interessante stimare l'errore

$$R_n(z) := \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \tag{C.6}$$

che si commette approssimando $\exp(z)$ con la somma parziale di ordine n:

Proposizione C.5 *Per ogni intero $n \geq 0$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$ con*[11] $0 < |z| < n + 2$ *si ha*

$$|R_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \ \frac{n+2}{n+2-|z|} \ . \tag{C.7}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
|R_n(z)| &= |\sum_{k>n} \frac{z^k}{k!}| \leq \sum_{k>n} \frac{|z|^k}{k!} \\
&= \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+3)(n+2)} + \cdots\Big) \\
&\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{|z|}{n+2})^k \\
&= \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \ \frac{n+2}{n+2-|z|} \ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

L'esponenziale realizza un omomorfismo tra il gruppo additivo $(\mathbb{C}, +)$ e il gruppo moltiplicativo $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, *)$, cioè:

[11] Ovviamente, $R_n(0) = 0$ per ogni n.

Teorema C.6 (Teorema di addizione) *Per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$*,* $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$*. Inoltre* $\exp(0) = 1$*,* $\exp(z) \neq 0$ *e* $1/\exp(z) = \exp(-z)$*,* $\forall z \in \mathbb{C}$*.*

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton segue che

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(z+w)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} \frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\sum_{h=0}^{n-j} \frac{w^h}{h!} \\
&= s_n - r_n
\end{aligned}$$

con

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\sum_{h=0}^{n} \frac{w^h}{h!} \,, \qquad r_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{z^j}{j!}\sum_{h=n-j+1}^{n} \frac{w^h}{h!} \,.$$

Poiché $s_n \to \exp(z)\exp(w)$, la tesi seguirà da $\lim r_n = 0$. Infatti, sia $M = \max\{|z|, |w|\}$ e si osservi che dalla Proposizione C.5 con $z = 1$ segue che

$$\sum_{h=m}^{\infty} \frac{1}{h!} < \frac{m+1}{m}\,\frac{1}{m!} \leq \frac{2}{m!} \,, \qquad \forall\, m \geq 1 \,, \tag{C.8}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
|r_n| &\leq M^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{h=n-j+1}^{n} \frac{1}{h!} \\
&< M^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{h=n-j+1}^{\infty} \frac{1}{h!} \\
&< 2M^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\frac{1}{(n-j+1)!} \\
&= \frac{2M^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} \\
&< \frac{2M^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \\
&= 2\,\frac{2M^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \,.
\end{aligned}$$

Le rimanenti affermazioni sono elementari: $\exp(0) = 1$ segue dalla definizione, e per ogni z, $1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z)$ che mostra che $\exp(-z)$ è il reciproco di $\exp(z)$ (e che $\exp(z) \neq 0$). ∎

Si noti che[12]

$$\overline{\exp(z)} := \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} := \exp(\overline{z}) \ . \tag{C.9}$$

e che

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} := \exp(z) \ . \tag{C.10}$$

L'esponenziale complesso si può anche ottenere attraverso il seguente limite notevole:

Teorema C.7 *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton segue che

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\,\frac{z^k}{k!} \ , \qquad \text{con} \quad a_{nk} := \frac{n!}{(n-k)!n^k} \ . \tag{C.11}$$

Si noti che $a_{nk} > 0$ per ogni $n \ge k \ge 0$ e che

$$\begin{aligned}
& a_{n0} = 1 \ , \qquad a_{n1} = 1 \ , && \forall\, n \\
& a_{nk} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{(k-1)\ \text{termini}} < 1 \ , && \forall\, n \ge k \ge 2 \ , \\
& \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 1 \ .
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Quindi, se $n > m \ge 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{m} a_{nk}\,\frac{z^k}{k!}\right| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_{nk}\,\frac{z^k}{k!}\right| \\
&\le \sum_{k=m+1}^{n} a_{nk}\,\frac{|z|^k}{k!} \\
&\le \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \\
&\le \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \ .
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Fissiamo ora $\varepsilon > 0$. Dalla Proposizione C.5 segue che esiste $m > 0$ tale che

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{C.14}$$

e, poiché da (C.12) segue che $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} |a_{nk}-1|\frac{|z|^k}{k!} = 0$, si ha che esiste $n > m$ tale che

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{nk}-1|\frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{C.15}$$

[12] Si noti che l'operazione di complesso coniugato è continua sul campo dei complessi ossia se $z_n \to z$ allora $\overline{z_n} \to \overline{z}$.

Dunque, da (C.13), (C.14) e (C.15), si ha che

$$\begin{aligned}
\Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \exp(z)\Big| &= \Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^m a_{nk}\,\frac{z^k}{k!} + \sum_{k=0}^m (a_{nk}-1)\,\frac{z^k}{k!} - \sum_{k=m+1}^\infty \frac{z^k}{k!}\Big| \\
&\le \Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^m a_{nk}\,\frac{z^k}{k!}\Big| + \sum_{k=0}^m |a_{nk}-1|\,\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^\infty \frac{|z|^k}{k!} \\
&< \varepsilon\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Osservazione C.8 Si noti che, se $z > 0$, $(1+z) < (1+z/2)^2$ e che per $n \ge k \ge 2$, $a_{nk} < a_{n+1\ k}$. Quindi, *per* $z > 0$ *la successione* $\Big(1+\dfrac{z}{n}\Big)^n$ *è strettamente crescente.*

Definizione C.9 *Il numero* $e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n$ *prende il nome di numero di Nepero*[13]*.*

L'espansione decimale di e è data da[14]:

$$\begin{aligned}
e \;=\; & 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959 \\
& 9574966967627724076630353547594571382178525166427 4 \\
\end{aligned}$$

In effetti:

Teorema C.10 *e è irrazionale.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che e sia razionale ossia che $e = p/q$ con p e q numeri naturali co–primi. Allora, ricordando (C.8), si ha che

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = \sum_{k=q+1}^\infty \frac{1}{k!} < \frac{q+2}{q+1}\,\frac{1}{(q+1)!} < \frac{1}{q!}\,\frac{1}{q}\,.$$

Moltiplicando tale relazione per $q!$ si ottiene

$$0 < N := p(q-1)! - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} < \frac{1}{q} < 1\,,$$

il che è impossibile essendo N un numero intero. $\blacksquare$

Infine, le proprietà della funzione $\exp(x)$ per x reali sono riassunte nella seguente

[13] Talvolta, numero di Eulero.

[14] È facile, usando la definizione per serie di e, calcolarne le prime cifre decimali.

Proposizione C.11 *Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora:*

(i) $\exp(x) = e^x$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^k = 0$, *per ogni intero k;*

(iii) *la funzione $x \to \exp(x)$ è strettamente positiva, crescente e convessa.*

Dimostrazione Dal Teorema C.6 si ha, per ogni numero intero positivo q, che

$$\underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right)\cdots\exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{q \text{ volte}} = \exp(1) = e \ , \tag{C.16}$$

ossia

$$\exp\left(\frac{1}{q}\right) = e^{\frac{1}{q}} \ . \tag{C.17}$$

Da (C.16) e dal Teorema C.6, se p e q sono numeri interi positivi,

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right)\cdots\exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{p \text{ volte}} = e^{\frac{p}{q}} \ . \tag{C.18}$$

Poiché la funzione $\exp(z)$ è continua su $\mathbb{C}$ (essendo rappresentata da una serie di potenze con raggio di convergenza infinito), se p_k e q_k sono numeri interi positivi tali che p_k/q_k tende al numero reale x, si ha che $e^{\frac{p_k}{q_k}} = \exp\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \to \exp(x)$; tale relazione mostra la validità di (i) nel caso in cui x sia un numero reale positivo. Se $x < 0$, da (i) segue che $e^{-x} = \exp(-x) = \exp(x)^{-1} = 1/e^x$ e dunque $\exp(x) = \exp(-x)^{-1} = \left(e^{-x}\right)^{-1} = e^x$, il che mostra la validità di (i) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Chiaramente basta dimostrare (ii) per $k > 0$. Per ogni $x > 0$, $e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, dunque $e^x/x^k > x/(k+1)!$ e quindi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x}x^k = 0 \qquad \forall\ k \in \mathbb{N} \ . \tag{C.19}$$

Dalla definizione di $\exp(x)$ segue che $e^x > 0$ per $x \geq 0$ e poiché, per $x < 0$, $\exp(x) = 1/\exp(-x) = 1/\exp(|x|)$ si ha che

$$\exp(x) = e^x > 0 \ , \quad \forall \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{C.20}$$

Poiché la derivata reale coincide con quella complessa per $x \in \mathbb{R}$ si ha che $(e^x)' = e^x$ e dunque la funzione $x \in \mathbb{R} \to e^x \in \mathbb{R}$ è una funzione strettamente positiva, strettamente crescente e strettamente convessa che manda la retta $\mathbb{R}$ sulla semiretta $(0, \infty)$ in maniera biunivoca. ∎

Definizione C.12 *Per $y > 0$ definiamo*[15] *il logaritmo reale di y, $\log_* y$, come la funzione inversa di $x \in \mathbb{R} \to \exp(x)$.*

Inoltre, in vista di (i) della Proposizione C.11 poniamo

Definizione C.13 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$, si pone $e^z := \exp(z)$.*

[15] Questa notazione non è standard e verrà usata solo in questa appendice per motivi che appariranno chiari più sotto quando discuteremo il logaritmo complesso.

Funzioni trigonometriche

Definizione C.14 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ il coseno e seno di z sono definiti come*

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ , \qquad \operatorname{sen} z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ . \tag{C.21}$$

Per il criterio della radice (o del confronto), tali serie hanno raggio di convergenza infinito.

Proposizione C.15 *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$\cos x \in \mathbb{R} \ , \ \operatorname{sen} x \in \mathbb{R} \ , \tag{C.22}$$

$$\cos(-z) = \cos z \ , \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \ , \tag{C.23}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ , \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ , \tag{C.24}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \quad \text{(formula di Eulero)} \ , \tag{C.25}$$

$$\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x \ , \ \operatorname{Im} e^{ix} = \operatorname{sen} x \ ; \tag{C.26}$$

$$\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w \ , \tag{C.27}$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \ , \tag{C.28}$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ , \tag{C.29}$$

$$|e^{ix}| = 1 \ , \tag{C.30}$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z \ , \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z \ . \tag{C.31}$$

Dimostrazione Le (C.22) e (C.23) seguono immediatamente dalla definizione C.14.
La (C.24) segue addizionando le serie esponenziali (cosa possibile essendo tali serie assolutamente convergenti).
La (C.25) segue da (C.24).
La (C.26) segue da (C.25) e da (C.22).
La (C.29) segue da (C.24).
La (C.30) segue da (C.25), (C.22) e (C.29).
La (C.31) segue dalla definizione C.14 e dalla derivabilità termine a termine delle serie di potenze. ∎

Possiamo ora dare una definizione analitica di "pi greco". Sia Z l'insieme degli zeri positivi del coseno ossia $Z := \{z > 0 : \ \cos z = 0\}$. Tale insieme è non vuoto. Infatti il coseno è una funzione continua tale che $\cos 0 = 1$ mentre

$$\cos 2 := 1 - 2 + \frac{2}{3} - \Big(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\Big) - \Big(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\Big) - \cdots < -\frac{1}{3} \ . \tag{C.32}$$

Definizione C.16 $\pi = 2z_1$ *dove* $z_1 := \inf Z$.

La stima (C.32) mostra che $\pi < 4$; è facile vedere che $\cos x > 0$ per ogni[16] $0 \le x \le 3/2$ e dunque $\pi > 3$. In effetti,

$$\begin{aligned}\pi \;=\; & 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751\,0\\ & 58209749445923078164062862089986280348253421170679\\ & 82148086513282306647093844609550582231725359408128\\ & 48111745028410270193852110555964462294895493038196\\ & 44288109756659334461284756482337867831652712019091\\ & 45648566923460348610454326648213393607260249141273\\ & 72458700660631558817488152092096282925409171536436\\ & 78925903600113305305488204665213841469519415116094\ldots\;,\end{aligned}$$

Dalla definizione di π seguono le proprietà di periodicità e di simmetria delle funzioni seno e coseno:

Proposizione C.17 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha:*

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1\ , \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i\ , \qquad e^{i\pi} = -1\ , \qquad e^{i2\pi k} = 1\ \ \forall k \in \mathbb{Z}\ , \tag{C.33}$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z\ , \qquad \cos(z+2\pi) = \cos z\ , \qquad \operatorname{sen}(z+2\pi) = \operatorname{sen} z\ , \tag{C.34}$$

$$\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{2}+z\Big) = \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{2}-z\Big)\ , \qquad \cos\Big(\frac{\pi}{2}+z\Big) = -\cos\Big(\frac{\pi}{2}-z\Big)\ , \tag{C.35}$$

$$\operatorname{sen}(\pi+z) = -\operatorname{sen}(\pi-z)\ , \qquad \cos(\pi+z) = \cos(\pi-z)\ . \tag{C.36}$$

Dimostrazione Essendo $\pi/2 = z_1$ uno zero del coseno, da (C.29) segue che $\operatorname{sen}(\pi/2) = \pm 1$, d'altra parte essendo $\cos x > 0$ per $x \in [0, \pi/2)$ (come segue di nuovo dalla definizione di π e da $\cos 0 = 1$) ed essendo $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, la funzione $\operatorname{sen} x$, che vale 0 in 0 risulta strettamente crescente tra 0 e $\pi/2$ quindi $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$; dunque $e^{i\pi/2} = i$; dal Teorema C.6 segue che $e^{i\pi} = e^{i\pi/2}e^{i\pi/2} = i^2 = -1$, $e^{2\pi i} = e^{i\pi}e^{i\pi} = 1, e^{2\pi i k} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1$ con il che abbiamo dimostrato la validità di (C.33). Le (C.34), (C.35) e (C.36) seguono ora immediatamente da (C.33) e dal Teorema C.6 o da (C.27) e (C.28). $\blacksquare$

Si noti che da tali proprietà di periodicità e simmetria e dalle regole di derivazione del seno e coseno si ricavano facilmente i grafici di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ (per $x \in \mathbb{R}$).

Infine dimostriamo alcune proprietà di iniettività della funzione esponenziale complessa.

Proposizione C.18

(1) *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, esiste un unico $t \in [0, 2\pi)$ tale che* $\exp(it) = z$.

(2) *per ogni $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che* $\exp(w) = z$.

(3) $\exp(z) = \exp(w)$ *se e solo se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $z - w = 2\pi k i$.*

---

[16] Se $x \in [0, 3/2]$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \Big(\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\Big) + \cdots \ge 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} := Q(x^2)$ con $Q(t)$ cubica senza punti critici e dunque strettamente decrescente. Quindi, per $x \in [0, 3/2]$, $\cos x \ge Q(x^2) \ge Q(9/4) = 359/5120 > 0$.

Dimostrazione (1): Cominciamo col dimostrare che $e^{it} \neq 1$ se $t \in (0, 2\pi)$. Infatti, dato $t \in (0, 2\pi)$ sia $\tau := t/4 \in (0, \pi/2)$ e poniamo $e^{i\tau} = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$). I numeri x e y appartengono all'intervallo aperto $(0, 1)$ e $e^{it} = (x+iy)^4 = (x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2 + i4xy(x^2-y^2)$. Se e^{it} fosse reale allora si avrebbe che $x^2 = y^2$ e da (C.29) seguirebbe che $x^2 = y^2 = 1/2$ ossia $e^{it} = -1$. Da questa proprietà segue immediatamente l'unicità in (1): se fosse $e^{it_1} = e^{it_2}$ con $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$ allora $e^{i(t_2-t_1)} = 1$ con $0 < t_2 - t_1 < 2\pi$ il che contraddirrebbe quanto appena dimostrato. Rimane da dimostrare l'esistenza: dato $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, poniamo $z = x + iy$ (con $x, y \in [-1, 1]$). Se x e y appartengono a $[0, 1]$, essendo $\cos t$ strettamente decrescente per $t \in [0, \pi/2]$, si avrebbe che esiste un unico $t_0 \in [0, \pi/2]$ tale che $\cos t_0 = x$ e dunque (essendo $y \geq 0$) $e^{it_0} = z$. Se $x < 0$ e $y \geq 0$, allora $-iz = e^{it_0}$ e quindi $z = ie^{it_0} = e^{i(t_0+\pi/2)}$. Se $y < 0$, allora $-z = e^{it_0}$ e quindi $z = -e^{it_0} = e^{i(t_0+\pi)}$, il che conclude la dimostrazione di (1).
(2) segue ora facilmente: sia $x = \log_* |z|$. Allora $z/|z| = ze^{-x} = e^{iy}$ per un unico $y \in [0, 2\pi)$ e dunque $z = e^w$ con $w := x + iy$.
(3) Se $z := x + iy$, $w := x' + iy'$ (con $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$) e se $e^z = e^w$ allora $e^x = e^{x'}$ e quindi $x = x'$ e $e^{i(y-y')} = 1$. Se poniamo $k := [(y - y')/(2\pi)]$, allora $y - y' - 2\pi k \in [0, 2\pi)$ e (3) segue da (1). ∎

Funzioni iperboliche

Definizione C.19 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ il coseno iperbolico ed il seno iperbolico di z sono definiti come*

$$\cosh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ , \qquad \mathrm{senh}\, z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ . \tag{C.37}$$

Per il criterio della radice (o del confronto), tali serie hanno raggio di convergenza infinito.

Chiaramente,

$$\cosh(iz) = \cos z \ , \qquad \mathrm{senh}\,(iz) = i \,\mathrm{sen}\, z \ . \tag{C.38}$$

Da tali relazioni è facile sviluppare una teoria del tutto analoga a quella sviluppata per le funzioni trigonometriche, i cui dettagli vengono lasciati per **esercizio**.

Il logaritmo complesso

Definizione C.20 *Se $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, poniamo*

$$\log w = \{z : \ \exp(z) = w\} \ , \quad \arg w = \ \mathrm{Im} \log w = \{\, \mathrm{Im}\, z : z \in \log w\} \ .$$

Proposizione C.21 *Sia $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Esiste un unico $z = x + iy \in \log w$ tale che $y \in [0, 2\pi)$. Inoltre $x = \log_* |w|$.*

Dimostrazione Per la parte (1) della Proposizione C.18 esiste un unico $y \in [0, 2\pi)$ tale che

$$\exp(iy) = \frac{w}{|w|} \ ,$$

e per il Teorema C.6 e la definizione di $\log_*$

$$\exp(\log_* |w| + iy) = \exp(\log_* |w|) \exp(iy) = |w| \ \frac{w}{|w|} = w \ . \quad ∎$$

Definizione C.22 *La funzione che a* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *associa l'unico* $z \in \mathbb{C}$ *della Proposizione C.21 si denota* Log w *e si chiama "parte principale del logaritmo di* w*"; la funzione che a* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *associa l'unico* $y \in [0, 2\pi)$ *della Proposizione C.21 si denota* Arg w *e si chiama "argomento principale di* w*".*

Proposizione C.23 *Se* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *allora*

$$\log w = \mathrm{Log}\ w + i2\pi\mathbb{Z} = \log_* |w| + i\mathrm{Arg}\ w + i2\pi\mathbb{Z} \ .$$

La dimostrazione è conseguenza immediata della Proposizione C.21 e della parte (3) del Teorema C.18. ∎

Proposizione C.24 *Se* w_1 *e* w_2 *sono numeri complessi diversi da zero, allora*

$$\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2 \ . \tag{C.39}$$

Si noti che l'uguaglianza in (C.39) è un'uguaglianza tra insiemi.
Dimostrazione Se $z_k \in \log w_k$, allora $\exp(z_k) = w_k$ e, per il teorema di addizione, $\exp(z_1 + z_2) = w_1 w_2$, cioè $z_1 + z_2 \in \log(w_1 w_2)$. Questo dimostra che

$$\log w_1 + \log w_2 \subseteq \log(w_1 w_2) \ . \tag{C.40}$$

Sia ora $z \in \log(w_1 w_2)$ e si considerino $z_k \in \log w_k$. Si ha allora (per le scelte fatte e per il teorema di addizione)

$$\exp(z) = w_1 w_2 = \exp(z_1 + z_2).$$

Dalla parte (3) del Teorema C.18 segue allora che esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $z - (z_1 + z_2) = 2\pi i k$, ovvero, $z = (z_1 + 2\pi i k) + z_2$. Ma $z_1 + 2\pi i k \in \log w_1$ e, dunque, $z \in \log w_1 + \log w_2$, il che dimostra

$$\log(w_1 w_2) \subseteq \log w_1 + \log w_2 \ .$$

Tale relazione assieme a (C.40) prova l'asserto. ∎

Definizione C.25 *Se* $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *e* $b \in \mathbb{C}$ *definiamo*

$$a^b := \exp(b \log a) = \Big\{ z = \exp(bw) : \ w \in \log a \Big\} \ . \tag{C.41}$$

Esercizio Trovare gli errori:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \exp\Big(\frac{1}{2}\log 2\Big) = \exp\Big(\frac{1}{2}(\log_* 2 + i2\pi\mathbb{Z})\Big) = \pm\sqrt{2} \ ;$$

$$e = e^1 = e^{-i^2} = e^{-i\cdot i} = \Big(e^{-i}\Big)^i = \Big(e^{-i+2\pi i}\Big)^i = e^{(-i+2\pi i)i} = e^{1-2\pi} = \frac{e}{e^{2\pi}} \ .$$