8.4 LA COMPLETEZZA ALGEBRICA DEL CAMPO COMPLESSO

Abbiamo ora gli strumenti per dare una semplice dimostrazione del fatto che il campo complesso è algebricamente completo, ovvero, ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ha una radice complessa.

TEOREMA 8.8 Supponiamo che $a_0, \ldots, a_n$ siano numeri complessi, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$,

$$P(z) = \sum_0^n a_k z^k.$$

Allora $P(z) = 0$ per qualche numero complesso z.

DIMOSTRAZIONE Senza perdere in generalità, supponiamo $a_n = 1$. Poniamo

$$\mu = \inf |P(z)| \qquad (z \text{ complesso}) \tag{55}$$

Se $|z| = R$, allora

$$|P(z)| \geq R^n[1 - |a_{n-1}|R^{-1} - \cdots - |a_0|R^{-n}]. \tag{56}$$

Il secondo membro della (56) tende a ∞ se $R \to \infty$. Di conseguenza esiste R_0 tale che $|P(z)| > \mu$ se $|z| > R_0$. Poiché $|P|$ è continua nel disco chiuso di centro 0 e raggio R_0, il Teorema 4.16 mostra che $|P(z_0)| = \mu$ per qualche z_0. Mostriamo che $\mu = 0$. Se così non fosse, poniamo $Q(z) = P(z+z_0)/P(z_0)$. Allora Q è un polinomio non costante, $Q(0) = 1$ e $|Q(z)| \geq 1$ per ogni z. Sia k, $1 \leq k \leq n$, il più piccolo intero k tale che

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n, \qquad b_k \neq 0. \tag{57}$$

Per il Teorema 8.7(d) esiste un numero reale θ tale che

$$e^{ik\theta} b_k = -|b_k|. \tag{58}$$

Se $r > 0$ e $r^k|b_k| < 1$, la (58) implica

$$|1 + b_k r^k e^{ik\theta}| = 1 - r^k|b_k|,$$

e quindi

$$|Q(re^{i\theta})| \leq 1 - r^k\{|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n|\}.$$

Per r sufficientemente piccolo, l'espressione fra parentesi graffe è positiva; da cui $|Q(r\,e^{i\theta})| < 1$, una contraddizione. Perciò $\mu = 0$, cioè, $P(z_0) = 0$.