PAC - APRILE 2006

E 7. Metodo Monte Carlo per il calcolo di integrali.

Si scriva un programma per calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; 4\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 \;=\; \pi$$

attraverso le somme parziali $S_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(X_i)$, dove $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ e $X_1, \ldots, X_M$ sono realizzazioni indipendenti di una v.a. uniforme in $[0, 1]$.

E 8. Metodo Monte Carlo per il calcolo di aree (metodo del rigetto)

Si scriva un programma che utilizzi il metodo del rigetto per calcolare il valore di π come l'area di un cerchio di raggio 1 inscritto in un quadrato di lato 2. Si discuta l'efficienza dell'algoritmo rispetto all'esercitazione E 7.

Suggerimenti

E 7. Ricordiamo che se X è v.a. uniforme in $[0, 1]$, data una funzione continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{E}f(X) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Per la legge dei grandi numeri tale valore può essere approssimato dalla media empirica $S_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(X_i)$ dove $X_1, \ldots, X_M$ sono M realizzazioni indipendenti della variabile X. Scegliendo $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ e simulando le variabili X_i otteniamo dunque una stima di $\pi = 3.14159265358\ldots$.

E 8. Sia Q il quadrato di lato 2 centrato nell'origine del piano cartesiano. Sia C il cerchio di raggio 1 con centro nell'origine. Siano u e v due v.a. indipendenti uniformi in $[0, 1]$ e si ponga $x = -1 + 2u$, $y = -1 + 2v$. Osserviamo che il punto $P = (x, y)$ di coordinate x, y è distribuito uniformemente in Q. Definiamo $Z = \chi(P \in C) = \chi(x^2 + y^2 \leqslant 1)$. Abbiamo

$$\mathbb{P}(P \in C) = \mathbb{E}Z = \frac{\text{area di } C}{\text{area di } Q} = \frac{\pi}{4}$$

Per la legge dei grandi numeri possiamo quindi stimare π tramite

$$S_M = \frac{4}{M}\sum_{i=1}^{M} Z_i$$

dove $Z_1, \ldots, Z_M$ sono realizzazioni indipendenti di Z. Da una analisi qualitativa risulta che il metodo del rigetto è meno efficace del metodo dell'esercitazione E 7.

caputo@mat.uniroma3.it.