

E 6. Fluttuazioni nel lancio di una moneta.

Una moneta (equa) viene lanciata N volte (per esempio $N = 10^4$). Il giocatore A ottiene un punto ogni volta che il lancio dà “testa”. Il giocatore B ottiene un punto ogni volta che il lancio dà “croce”.

1. Si calcoli la frazione di tempo v in cui il giocatore A è in vantaggio sul giocatore B . Contrariamente a una concezione ingenua delle fluttuazioni si osserverà che i valori tipici di v non si avvicinano (nemmeno per N molto grande) al valor medio $\frac{1}{2}$.

2. Si ripeta l’esperimento M volte e si indichino con v_1, v_2, \dots, v_M i valori delle frazioni di tempo corrispondenti. Si ponga, al solito $S_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v_i$. Visualizzando l’andamento di S_M al crescere di M si osserverà che $S_M \sim \frac{1}{2}$, il che restituisce, in parte, l’intuizione perduta.

3. Siano v_1, v_2, \dots, v_M come sopra e si costruisca un istogramma delle frequenze come segue. Suddividiamo l’intervallo $[0, 1]$ in Δ (per es. $\Delta = 100$) parti uguali e calcoliamo la frazione di esperimenti che fornisce un valore della frequenza nei vari intervalli:

$$f(k) = \frac{\Delta}{M} \sum_{i=1}^M \chi \left(v_i \in \left[\frac{k}{\Delta}, \frac{k+1}{\Delta} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \Delta - 1$$

Fissato M (per es. $M = 10^5$) si grafichi f al variare di k fra 0 e $\Delta - 1$. Si osservi la concentrazione intorno agli estremi.

4. Si osservi che l’istogramma approssima (sempre meglio al crescere del parametro Δ) la densità di probabilità

$$\frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in [0, 1].$$

Questa è nota come *legge dell’arcoseno*.

Suggerimenti

Siano X_1, \dots, X_N bernoulliane indipendenti di parametro $p = \frac{1}{2}$ (i risultati degli N lanci di una moneta). Ponendo $Y_i = 2X_i - 1$ si ha $+1$ se vince A e -1 se vince B . Al tempo $k = 1, 2, \dots, N$ il bilancio tra i due giocatori è dato da

$$Z_k = \sum_{i=1}^k Y_i = \#(\text{vincite } A) - \#(\text{vincite } B)$$

e diremo che A è in vantaggio se $Z_k > 0$. Quindi v si può calcolare mediante la formula

$$v = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi(Z_k > 0) + \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \chi(Z_k = 0).$$

Qui il secondo termine è stato aggiunto per motivi di simmetria (altrimenti non è esatto dire che $S_M \rightarrow \frac{1}{2}$). Ripetendo M volte l’esperimento si ottengono i valori di S_M e dell’istogramma $f(k)$. Per il calcolo di $f(k)$ si deve fare attenzione a non escludere gli estremi $v = 0, v = 1$. L’espressione data nel testo per esempio include $v = 0$ ma esclude $v = 1$. Si consiglia quindi di correggerla aggiungendo il valore $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \chi(v_i = 1)$ alla variabile $f(\Delta - 1)$. Per una discussione dettagliata della legge dell’arcoseno rimandiamo al libro di W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 1, Wiley, 1971