

# Tema 1

strutture numeriche, aritmetica

## 1.1 Quesiti di livello base

---

**1.1.1** Eseguire la divisione con resto di 237 per 43 ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione compiuta.

**1.1.2** Fra 1 e 600 (inclusi) quanti sono i multipli di 3, quanti i multipli di 3 e di 4, quanti i multipli di 3 o di 4, quanti i multipli di 17?

**1.1.3** Riscrivere in ordine crescente i seguenti numeri:  $\frac{2}{5}$ ; 0; -1; 0,91; -3; 0,19; 0,003

**1.1.4** Date le due frazioni  $\frac{3}{7}$  e  $\frac{4}{5}$ , trovare una frazione che sia strettamente compresa fra esse. (Si può procedere in vari modi ...)

**1.1.5** Eseguendo la "divisione con virgola" fra due interi, in quale caso essa si arresta? Se non si arresta, essa dà luogo, almeno da un certo punto in poi, ad un allineamento decimale periodico. Perché?

**1.1.6** Si consideri il numero  $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23$ ; è possibile decidere se è divisibile per 17 senza eseguire alcuna operazione?

**1.1.7** Un'azienda, in un momento di difficile congiuntura, abbassa lo stipendio di tutti i dipendenti dell'8%; superata questa difficoltà, alza tutti gli stipendi dell'8%. Come è, dopo di ciò, la situazione dei dipendenti?

**1.1.8** Trovare il Massimo Comune Divisore di 10002 e 9999.

**1.1.9** Dimostrare che per ogni intero naturale  $n$ , il numero  $n^3 - n$  è divisibile per 6.

**1.1.10** Qual è il maggiore dei due numeri:  $5^{1/3}$ ,  $3^{1/2}$ ?

**1.1.11** Ricordiamo che la "parte intera" di un numero reale  $x$  è il più grande intero che non supera  $x$ ; la parte intera di  $x$  si indica con  $[x]$ ; ad esempio,  $[2,34] = 2$ ,  $[-2,24] = -3$ . Ciò premesso, rispondere al seguente quesito: qual è la "parte intera" del logaritmo del numero 3748279 in base 10?

**1.1.12** In quali casi gli interi  $n$ ,  $n+2$  sono primi fra loro? (Ricordiamo che due interi naturali si dicono primi fra loro se hanno come unico divisore comune 1)

**1.1.13** È ben noto che il numero  $\sqrt{2}$  è irrazionale; per dimostrarlo si può procedere per assurdo, nel seguente modo. Supponiamo che sia  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  dove  $p$  e  $q$  sono interi e dove si può esigere che  $p$  e  $q$  siano primi fra loro. Moltiplicando membro a membro per  $q$  ed elevando al quadrato, si trova:

$$2q^2 = p^2 .$$

Questa uguaglianza ci dice che  $p^2$  è pari e, perciò, anche  $p$  è pari. Infatti se  $p$  non fosse multiplo di 2, nemmeno  $p^2$  potrebbe esserlo. Poniamo allora:  $p = 2r$ ; sostituendo si ha  $2q^2 = 4r^2$ , da cui  $q^2 = 2r^2$ . Da questa relazione ricaviamo come prima che  $q$  è pari; dunque  $p$  e  $q$  sono entrambi pari: assurdo perché li abbiamo supposti primi fra loro.

Si chiede di dimostrare, usando un ragionamento analogo, che  $\sqrt{3}$  è irrazionale.

**1.1.14** Dimostrare che  $\log_2 5$  è irrazionale. (Un avvio: si procede per assurdo; se fosse razionale, si avrebbe  $\log_2 5 = \frac{p}{q}$ , con  $p$  e  $q$  interi naturali ...)

## 1.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

---

**1.2.1** La somma di tre numeri interi consecutivi è divisibile per 3. Verificarlo su qualche caso e dimostrarlo. Questo fatto è generalizzabile (e come?) alla somma di quattro interi consecutivi? Di cinque?

**1.2.2** Per quali valori interi di  $n$  il numero  $n^2 - 4n + 3$  è divisibile per 7?

**1.2.3** Siano  $(a, a')$ ,  $(b, b')$  due coppie di numeri reali positivi, con  $a < a'$ ,  $b < b'$ ; dei due numeri  $ab + a'b'$ ,  $ab' + a'b$  qual è il più grande? Più in generale, dati due insiemi  $A, B$ , ciascuno formato da  $n$  diversi numeri reali positivi, si moltiplichino ciascun numero del primo insieme per un numero del secondo, in modo da esaurire tutti i numeri di questo, e si sommino gli  $n$  prodotti ottenuti. Come procedere affinché il risultato sia massimo? E come per ottenere che sia minimo?

**1.2.4** Consideriamo la coppia di frazioni:

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}$$

( $b, b'$  interi positivi,  $a, a'$  interi non negativi). Diciamo che le due frazioni sono fra loro associate se  $a'b - ab' = \pm 1$ .

Si dimostri che due frazioni associate sono entrambe irriducibili (cioè, come si dice usualmente, sono ridotte ai minimi termini).

Si dimostri poi che se due frazioni  $a/b$ ,  $a'/b'$  sono fra loro associate, la frazione  $(a + a')/(b + b')$  è associata con entrambe.

**1.2.5** Se è  $2,3 \leq x \leq 2,5$  ed è  $-1,6 \leq y \leq -1,4$ , fra quali limiti sono compresi i numeri  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $xy$ ,  $x/y$ ?