Tema 3

Insiemi, elementi di logica, calcolo combinatorio, relazioni e funzioni

3.1 Quesiti di livello base

3.1.1 Si considerino i seguenti enunciati: “*n* è un multiplo di 3 o è un numero pari, e inoltre è minore di 20”; “*n* è un numero pari minore di 20, oppure è multiplo di 3 e minore di 20” (*n* è un numero naturale). Interpretare con espressioni insiemistiche i due enunciati.

3.1.2 Illustrare e giustificare (con un controllo su diagrammi di Eulero-Venn) la formula insiemistica $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3.1.3 Sia p l’affermazione “ogni numero naturale maggiore di 1 è somma di due numeri dispari”. Esprimere l’affermazione “non p” (senza usare espressioni come “non è vero che ...”).

Stabilire poi se p è vera oppure “non p” è vera.

3.1.4 In quanti modi n persone si possono sedere su una panca? Intorno a un tavolo circolare? (Due schieramenti si ritengono indistinguibili solo se ciascun commensale ha lo stesso vicino di destra e lo stesso vicino di sinistra).

3.1.5 Quante sono le colonne possibili nella schedina del Totocalcio?

3.1.6 Nell’insieme dei numeri naturali, come si può caratterizzare il sottoinsieme $S = \{1,3,5,7,9\}$? Con altre parole: trovare una proprietà caratteristica di S, cioè una proprietà che sia vera per tutti e soli gli elementi di S.

3.1.7 Dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$, quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

3.1.8 Quanti sono i sottoinsiemi dell’insieme $A = \{1,2,3,4\}$?

3.1.9 Nello schema della Figura 2, tutte le frecce hanno il significato di “... è maggiore di ...”; c’è un circoletto vuoto: in questo scrivete un numero naturale che rispetti le frecce. Manca anche qualche freccia fra i numeri dello schema; tracciate le frecce che collegano i numeri scritti.

3.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

Alcune delle domande che seguono possono sembrare “non matematiche”, perché non si parla di numeri, di figure, di insiemi, . . . Ma richiedono qualche semplice ragionamento, e quindi sono utili per saggiare le capacità matematiche.

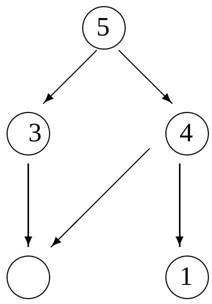


Figura 2.

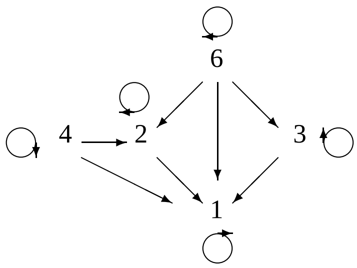


Figura 3.

3.2.1 Tra le applicazioni di cui si parla nell'esercizio 3.1.7, ce ne sono di suriettive? di iniettive? di biiettive?

3.2.2 Siano s, t due segmenti di lunghezza diversa tra loro paralleli e non allineati. Disegnate, se esistono, le seguenti applicazioni:

- un'applicazione biiettiva fra s e t,
- un'applicazione iniettiva di s in t che non sia biiettiva,
- un'applicazione suriettiva di s su t che non sia biiettiva,
- un'applicazione che non sia iniettiva né suriettiva.

3.2.3 Nella Figura 3 sono segnati alcuni numeri e alcune frecce fra essi (questa volta tutte le frecce possibili sono state tracciate). Che cosa possono significare queste frecce?

3.2.4 Nell'insieme delle rette del piano, fare un esempio di una relazione d'equivalenza.

3.2.5 Date le funzioni f, g tali che $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, costruite le funzioni che si ottengono componendo g seguito da f (cioè $f \circ g$), e, rispettivamente, f seguito da g (cioè $g \circ f$).

3.2.6 In un'isola ogni abitante è un cavaliere (e allora dice sempre la verità) o un furfante (e allora mente sempre). Incontriamo due abitanti A, B che ci fanno queste dichiarazioni:

A: "Io sono un cavaliere"

B: "A è un furfante".

A è un cavaliere? e B? Si può rispondere a queste domande?

3.2.7 Esprimere senza usare il "non" la frase "Non è vero che Gigi è buono e attento".

3.2.8 L'insieme $\{$A,C,N,O,R$\}$ è caratterizzato dalla proprietà di essere:

a) l'insieme delle prime 16 lettere, tolte alcune di esse
b) l'insieme delle lettere della parola *ANCONA*
c) l'insieme delle lettere della parola *ANCORA*
d) l'insieme delle lettere della parola *ANCORAGGIO*.

3.2.9 Siano p, q due proposizioni; supponiamo che da p si possa dedurre q. Che cosa altro si può certamente dire?

a) da (non p) si può dedurre (non q)
b) da (non q) si può dedurre (non p)
c) da q si può dedurre p
d) nessuna delle affermazioni precedenti.

Scrivere al posto di p e di q due proposizioni matematiche opportune in modo che dalla prima si possa dedurre la seconda. Quale chiamereste ipotesi? Quale chiamereste tesi?

3.3 Risposte commentate

3.1.1 Indichiamo con A, B, C rispettivamente, gli insiemi dei numeri pari, dei multipli di 3, dei numeri minori di 20: le espressioni cercate sono $(A \cup B) \cap C$ e $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3.1.2 Basta osservare i due "diagrammi di Eulero-Venn" nella Figura 4. In quello di sinistra $A \cup B$ è rappresentato dalla regione tratteggiata verticalmente, C dalla regione tratteggiata orizzontalmente, e la zona quadrettata rappresenta $(A \cup B) \cap C$. Nel secondo, sono evidenziati $(A \cap C)$ e $(B \cap C)$: la zona tratteggiata in un modo o nell'altro rappresenta $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. I risultati finali sono uguali. L'uguaglianza si esprime anche dicendo che "l'unione di insiemi è distributiva rispetto all'intersezione".

3.1.3 L'affermazione "non p" è "ci sono numeri naturali che non sono somma di due numeri dispari". Essa è vera, mentre p è falsa (un numero dispari non è somma di due numeri dispari).

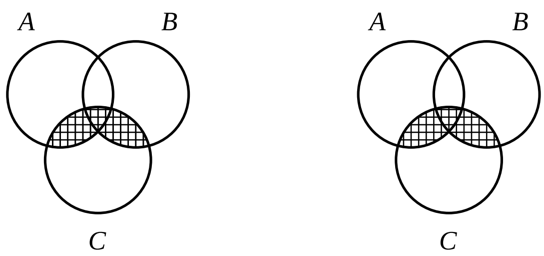


Figura 4.

3.1.4 Nel caso della panca, alla fine ci saranno n posti occupati: al primo ci può andare una qualunque delle n persone, al secondo una delle rimanenti $n-1$: abbiamo finora $n(n-1)$ possibilità. Al terzo posto può andare una delle rimanenti $n-2$ persone, ... Per l'ultimo posto resta una sola possibilità. In tutto i modi di sedersi sono tanti quanto il prodotto dei primi n numeri naturali (lo si indica con $n!$). Intorno a un tavolo circolare, facciamo sedere una persona in un posto qualsiasi (che alla fine non sarà distinguibile dagli altri, perché il tavolo è circolare). Tutto dipende da come le restanti $n-1$ persone si siedono nei restanti $n-1$ posti, e questo può avvenire in $(n-1)!$ modi.

3.1.5 Ci sono tre possibilità per la prima partita, tre per la seconda: combinandole tra loro abbiamo allora $9 = 3^2$ possibilità. Se si tiene conto anche della terza partita, si hanno $27 = 3^3$ possibilità .... Per tutte le 13 partite, le colonne possibili sono 3^{13}.

3.1.6 Si tratta di trovare una proprietà numerica che sia vera per ogni elemento di S, e per nessun altro. Per esempio: S è l'insieme dei numeri dispari minori di 10 (osservate che c'è nascosta la congiunzione "*e*": "... è un numero dispari e inoltre è minore di 10"). Non sarebbe corretto rispondere "sono numeri dispari", perché vi sono numeri dispari che non compaiono in S.

3.1.7 All'elemento 1 possiamo associare a, oppure b, oppure c; poi a 2 possiamo associare a, oppure b, oppure c, e così via. In tutto si hanno 3^4 applicazioni.

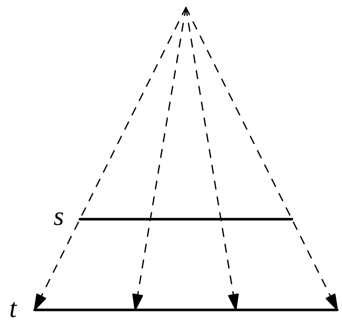
3.1.8 C'è il sottoinsieme vuoto; poi 4 sottoinsiemi formati da un solo elemento; poi 6 formati da due elementi $(\{1,2\},\{1,3\},...,\{3,4\})$; 4 di tre elementi (ciascuno si ottiene eliminando uno dei quattro elementi); infine A stesso. In totale $1+4+6+4+1 = 16$ sottoinsiemi.

3.1.9 In basso a sinistra manca un numero, minore di 3: può trattarsi di 0, di 1 o di 2. Prendiamo per esempio 2: occorre tracciare una freccia da 5 a 2 e a 1, da 4 a 3, da 2 a 1.

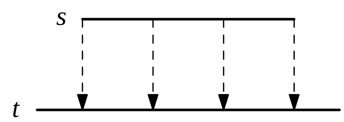
* * *

3.2.1 Vi sono varie applicazioni suriettive di A in B. Ne otteniamo una associando a $1, 2, 3, 4$ rispettivamente a, b, c, c. Non vi sono applicazioni iniettive, perché due elementi di A debbono avere lo stesso corrispondente. In particolare, non vi sono applicazioni biiettive di A in B.

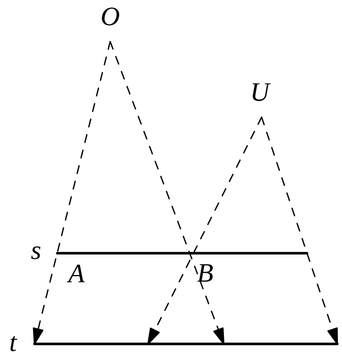
3.2.2 Esistono molte applicazioni di ciascuno dei tipi richiesti. Ad esempio quelle in Figura 5.



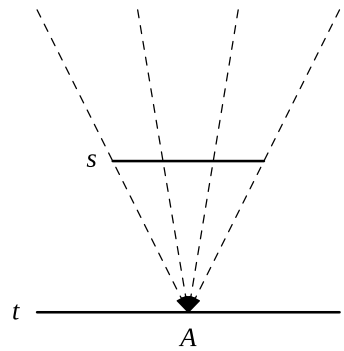
applicazione biiettiva



applicazione iniettiva



applicazione suriettiva (i punti da A a B compreso si proiettano da O; gli altri da U)



applicazione che non è iniettiva e neppure suriettiva (tutti i punti di s sono proiettati nel punto A)

Figura 5.

3.2.3 Una possibile risposta è: "... è multiplo di ...".

3.2.4 Un esempio possibile è: "due rette r, s non hanno punti comuni o sono coincidenti".

Un altro possibile esempio è il seguente. Sia P un punto arbitrario del piano; due rette r, s sono equivalenti se passano entrambe per il punto P oppure se entrambe non lo contengono. Le rette del piano risultano in questo modo suddivise in due classi di equivalenza: le rette passanti per P (una classe) e tutte le altre (l'altra classe).

3.2.5 Si osservi che $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Posto $y = f(x) = 2x$, si ha $z = g(y) = g(f(x)) = (2x)^2 = 4x^2$: quindi $(g \circ f)(x) = 4x^2$. Invece $(f \circ g)(x) = 2x^2$.

3.2.6 A e B sono certamente di tipo diverso, perché fanno affermazioni opposte. Non si può dire altro: A può essere un cavaliere, e B un furfante; oppure A ha mentito, e allora è un furfante, e B ha detto la verità, ed è un cavaliere.

3.2.7 Negare che Gigi abbia tutt'e due le qualità, vuol dire che gliene manca almeno una, cioè non è buono o non è attento. È dunque corretta la risposta "Gigi è cattivo o disattento". Spesso si crede che la risposta giusta sia "Gigi è cattivo e disattento": ma non si può pretendere che Gigi abbia tutt'e due le 'qualità negative'.

3.2.8 Risposta giusta: c). La b) non va bene perché nella parola *ANCONA* manca la "R"; la parola *ANCORAGGIO* contiene tutte le lettere A, C, N, O, R, ma contiene anche "G" e "I". Quanto alla risposta a), è vero che l'insieme $\{$A, C, N, O, R$\}$ si ottiene prendendo le prime 16 lettere e togliendone qualcuna, ma non si può dire che in questo modo si ottenga solo tale insieme, e quindi non si può dire che esso sia l'insieme così fatto (la domanda si poteva formulare anche dicendo "trovate una proprietà caratteristica dell'insieme $\{$A, C, N, O, R$\}$": quella espressa dalla risposta a) non si può considerare caratteristica per il nostro insieme, perché non viene precisato quali lettere si debbano togliere).

3.2.9 Risposta giusta: b). Infatti se si afferma che la tesi q è falsa, cioè che "non q" è vera, non può essere vera l'ipotesi p (altrimenti sarebbe vera anche q); quindi da "non q" segue "non p". Esempio: p: "Il quadrilatero *ABCD* è un rettangolo"; q: "Il quadrilatero *ABCD* si può inscrivere in una circonferenza". Osservate che a) non va bene, come si vede dall'esempio: se *ABCD* non è un rettangolo, non si può dire che non sia inscrivibile in una circonferenza. Anche c) non va bene, per lo stesso motivo.