UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2008

GARA di SECONDO LIVELLO

11 febbraio 2008

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici tascabili, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, è vietato l'uso di telefoni cellulari.
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 10**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

Nome:________________ Cognome:________________

Indirizzo:________________ Città:________________

Scuola:________________ Anno di corso:________ Città:________________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–14)		$\times 5 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.15			
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
ENI

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Una banda di ladri vuole aprire la cassaforte di una banca. Un basista ha fatto ubriacare il direttore della banca ed è riuscito a sapere che:

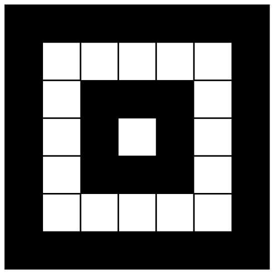
   (a) la combinazione è formata da 5 cifre da 0 a 9;

   (b) la combinazione è un numero pari;

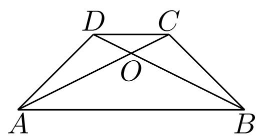
   (c) esattamente una delle 5 cifre della combinazione è dispari;

   (d) nella combinazione compaiono quattro cifre diverse, la cifra ripetuta è pari e compare in due posizioni non consecutive.

   Quante sono le combinazioni possibili in base a tali informazioni?
   (A) 3150 **(B)** 4500 **(C)** 5400 **(D)** 7200 **(E)** 9000.



2. Il *So-poko* è un nuovo gioco enigmistico che si gioca su una tabella quadrata di lato 203 caselle. Le caselle sono colorate di bianco e di nero a cornici concentriche alternate; la cornice più esterna è nera, mentre la casella centrale è bianca (vedi a fianco un esempio 7×7). Qual è la differenza tra il numero di caselle nere e il numero di caselle bianche presenti nello schema?
   (A) 103 **(B)** 203 **(C)** 207 **(D)** 303 **(E)** 407.



3. In un trapezio isoscele $ABCD$ di base maggiore AB, le diagonali vengono divise dal loro punto di incontro O in parti proporzionali ai numeri 1 e 3. Sapendo che l'area del triangolo BOC è 15, quanto misura l'area dell'intero trapezio?
   (A) 60 **(B)** 75 **(C)** 80 **(D)** 90 **(E)** 105.

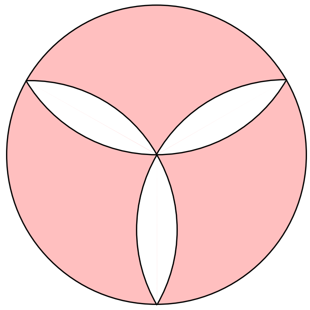
4. Francesco e Andrea decidono di consultare l'oracolo matematico per sapere se hanno delle coppie $(x,\ y)$ di numeri (reali) fortunati. Per determinare la coppia (o le coppie) di numeri fortunati, l'oracolo chiede sia a Francesco che a Andrea il giorno (g) e mese (m) di nascita, dopodiché per ciascuno di loro risolve il sistema:
$$\begin{cases} 13x - y = 181 \\ gx - my = 362 \end{cases}.$$
   Il responso dell'oracolo è che Andrea non ha nessuna coppia di numeri fortunati, mentre le coppie di numeri fortunati di Francesco sono infinite. Quale delle affermazioni seguenti è corretta?
   (A) Francesco e Andrea sono entrambi nati in primavera
   (B) Francesco e Andrea sono entrambi nati in estate
   (C) Francesco e Andrea sono entrambi nati in autunno
   (D) Francesco e Andrea sono entrambi nati in inverno
   (E) Francesco e Andrea sono nati in stagioni diverse.

5. Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots$ numeri interi tali che $a_0 = 19, a_1 = 25$, e per ogni $n \geq 0$ valga $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Qual è il più piccolo $i > 0$ per cui a_i è multiplo di 19?
   (A) 19 **(B)** 25 **(C)** 38 **(D)** 44 **(E)** 50.

6. Sull'isola che non c'è ci sono 2008 abitanti, divisi in tre clan: i furfanti che mentono sempre, i cavalieri che non mentono mai, i paggi che mentono un giorno sì e uno no. Lorenza, in visita per due giorni, li incontra tutti il primo giorno. Il primo dice: "c'è esattamente un furfante sull'isola"; il secondo dice: "ci sono esattamente due furfanti sull'isola"... il 2008-esimo dice: "ci sono esattamente 2008 furfanti sull'isola". Il giorno dopo Lorenza li interroga di nuovo tutti nello stesso ordine. Il primo dice: "c'è esattamente un cavaliere sull'isola"; il secondo dice: "ci sono esattamente due cavalieri sull'isola"... l'ultimo dice: "ci sono esattamente 2008 cavalieri sull'isola".
   Quanti paggi ci sono sull'isola?
   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 1004 **(D)** 2006
   (E) non è possibile determinarlo con i dati del problema.

7. In quanti modi si possono ordinare le cifre 1, 2, 4, 7 e 9 affinché formino un numero di cinque cifre divisibile per 11?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 24.

8. All'interno di un cerchio di raggio 1 si tracciano 3 archi di circonferenza, anch'essi di raggio 1, centrando nei vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Quanto vale l'area della zona ombreggiata?
(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$ **(B)** $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$ **(C)** $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **(E)** $6 - \pi$.



9. Eleonora gioca con un dado e un orologio (fermo) che all'inizio segna le 12. Per 2008 volte tira il dado e porta le lancette avanti di tante ore quanto è il risultato. Qual è alla fine la probabilità che la lancetta delle ore sia orizzontale?
(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2008}$ **(C)** $\frac{1}{1004}$ **(D)** $\frac{1}{12}$ **(E)** $\frac{1}{6}$.

10. Indicando con x_1, x_2, x_3 e x_4 le soluzioni dell'equazione $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$, quanto vale $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$?
(A) 1 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 7.

11. Vi sono 10000 lampadine numerate da 1 in poi, ciascuna delle quali viene accesa e spenta con un normale interruttore. All'inizio tutte le lampadine sono spente; poi si premono una volta tutti gli interruttori delle lampadine contrassegnate dai multipli di 1 (di conseguenza tutte le lampadine vengono accese), successivamente vengono premuti una volta gli interruttori di tutte quelle di posto pari (cioè multiplo di 2), poi quelle contrassegnate con i multipli di 3, successivamente si cambiano di stato quelle relative ai multipli di 4 e così via, sino ai multipli di 10000. Quale delle seguenti lampadine rimane accesa al termine delle operazioni?
(A) La numero 9405 **(B)** la numero 9406 **(C)** la numero 9407 **(D)** la numero 9408 **(E)** la numero 9409.

12. In un giorno di sole una sfera è posata su un terreno orizzontale. In un certo istante l'ombra della sfera raggiunge la distanza di 10 metri dal punto in cui la sfera tocca il terreno. Nello stesso istante un'asta di lunghezza 1 metro posta verticalmente al terreno getta un'ombra lunga 2 metri. Qual è il raggio della sfera in metri?
(A) $\frac{5}{2}$ **(B)** $9 - 4\sqrt{5}$ **(C)** $10\sqrt{5} - 20$ **(D)** $8\sqrt{10} - 23$ **(E)** $6 - \sqrt{15}$.

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Determinare il più grande numero di due cifre tale che:
a) sia un numero primo;
b) scambiando di posto le due cifre resti un numero primo;
c) il prodotto delle due cifre sia un numero primo.

14. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $A\widehat{B}C = 15°$. Sia H il piede dell'altezza da A e siano J, K le proiezioni di H su AB e su AC. Sapendo che l'area di $AJHK$ è 45 cm^2, quanti cm^2 vale il prodotto $BJ \cdot CK$?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Si determinino tutte le coppie $(x,\ y)$ di numeri reali che verificano l'equazione

$$\frac{4}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ .$$

SOLUZIONE

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Sia AB una corda di una circonferenza e P un punto interno ad AB tale che $AP = 2PB$. Sia DE la corda passante per P e perpendicolare ad AB. Dimostrare che il punto medio Q di AP è l'ortocentro di ADE.

SOLUZIONE

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

a) Si hanno sette numeri interi positivi a, b, c, d, e, f, g tali che i prodotti ab, bc, cd, de, ef, fg, ga sono tutti cubi perfetti. Dimostrare che anche a, b, c, d, e, f, g sono cubi perfetti.

b) Si hanno sei numeri interi positivi a, b, c, d, e, f tali che i prodotti ab, bc, cd, de, ef, fa sono tutti cubi perfetti. È sempre vero che a, b, c, d, e, f sono tutti cubi perfetti?

Nota: si dice cubo perfetto un intero m tale che $m = n^3$ per qualche intero n.

SOLUZIONE

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2008

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per gli scorsi anni, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quattordici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte esatte vanno attribuiti **5 punti**, alle risposte non date (bianche) va attribuito **1 punto**, alle risposte errate vanno attribuiti **0 punti**.

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B	E	C	D	A	B	D	D	E	C	E	C	71	45

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quattordici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi tre problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte.
Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 10.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate o non contenenti alcuna idea utile alla soluzione del problema e 10 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 15

a) **1 punto** per chi trova qualche soluzione particolare, come $(1,1)$.
b) **3 punti** per chi si accorge dell'omogeneità della relazione, ma non esclude $(0,0)$.
c) **4 punti** per chi si accorge dell'omogeneità della relazione ed esclude $(0,0)$.
d) **4 punti** per chi combina a) e b) e conclude che la retta $y=x$ va bene, ma non esclude $(0,0)$.
e) **5 punti** per chi combina a) e b) e conclude che la retta $y=x$ va bene, ed esclude $(0,0)$.
f) **9 punti** per chi mostra che la retta $y=x$ va bene ed è l'unica ad andar bene, ma non esclude $(0,0)$.
g) **10 punti** per la soluzione completa e corretta.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 16
Si assegnino:
3 punti a chi costruisce il triangolo BEQ ed osserva, con corretta motivazione, che è isoscele.
2 punti a chi osserva l'uguaglianza degli angoli alla circonferenza DEB, DAB (5 punti per chi dimostra entrambe le cose).
10 punti per chi porta a termine correttamente la dimostrazione (naturalmente, anche se con un ragionamento diverso da quello su esposto).

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 17
Proponiamo due diverse scale di punteggio a seconda che la soluzione del candidato segua le idee della prima o della seconda soluzione. Lasciamo al docente il compito di giudicare eventuali soluzioni sostanzialmente diverse da quelle proposte, tenendo presente che una soluzione logicamente corretta e completamente giustificata vale in ogni caso 10 punti, e che a soluzioni parziali possono essere dati i punteggi parziali delle due scale qui riportate. Per esempio:
Si assegnino complessivamente **8 punti** per la soluzione della prima parte e **2 punti** per la soluzione della seconda.
Per chi segue una strada simile alla soluzione 1, si assegnino:

- **1 punto** per l'osservazione che prodotto e rapporto di cubi sono cubi perfetti (anche se non è scritta espressamente ma solo usata nei passaggi);
- **1 punto** ulteriore a chi cerca di usare questo fatto per "costruire" cubi perfetti interessanti (per esempio $abcdef$, $bcdefg$);
- **2 punti** ulteriore a chi riesce a scrivere altri cubi perfetti che coinvolgano solo due incognite diverse (per esempio per aver provato che ad è un cubo perfetto);
- **2 punti** ulteriori a chi prova che a^2 (o analoghi) è un cubo perfetto;
- **2 punti** a chi termina la soluzione notando che a^2 cubo perfetto implica a cubo perfetto. Si considerino complete tutte le soluzioni in cui si prova correttamente che a è un cubo perfetto, senza formalizzare troppo su come questo risultato si estenda alle altre variabili.

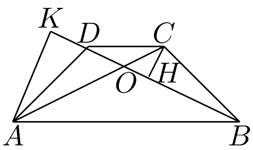
Per chi tenta una dimostrazione sulla via della soluzione 2 o 3, si assegnino:

- **2 punti** per l'osservazione che basta considerare i primi della fattorizzazione e provare che ognuno compare con esponente multiplo di 3;
- **1 punti** per arrivare a dire che le espressioni (1) devono essere multipli di 3, o un enunciato equivalente;
- **1 punto** per chi comincia a "risolvere il sistema" (per esempio, per chi nota che gli esponenti di a e c differiscono tra loro per un multiplo di 3);
- **4 punti** per chi completa la dimostrazione per assurdo o dimostrando che il sistema ha solo la soluzione banale.

Nella correzione della prima parte, si consiglia di concentrarsi sulle idee che portano sulla soluzione e di non badare a quanto siano giustificati i passaggi più "intuitivi" (per esempio, a^2 cubo perfetto implica a cubo perfetto, oppure a, b cubi perfetti implica ab cubo perfetto).
Per quanto riguarda la seconda parte, si assegnino **2 punti** a chi esibisce un controesempio valido, o in qualche modo riesce a dimostrare che esiste una soluzione non banale. Si assegnino **0 punti** a chi non fa altro che notare che la sua precedente dimostrazione del punto 1 non funziona più nel caso di sei interi.

1. La risposta è **(B)**. Dal fatto che il numero sia pari segue che deve essere pari l'ultima cifra. Conviene distinguere a seconda se questa sia quella doppia o no.
Nel primo caso l'altra cifra doppia può occupare 3 diverse posizioni (non la 4) e per ciascuna di queste la cifra dispari può occupare una qualunque delle 3 posizioni rimanenti.
Nel secondo caso le due cifre uguali possono disporsi in 3 modi diversi (1 e 3, 1 e 4, 2 e 4) e per ciascuno di questi la cifra dispari può occupare 2 posizioni tra le 3 libere (non la 5).
In tutto si hanno $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 15$ modi di fissare le posizioni delle due cifre uguali e della cifra dispari. Per ciascuno di questi modi si possono scegliere liberamente la cifra dispari (5 modi), la cifra pari doppia (5 modi), la prima e la seconda delle cifre pari singole (4 e 3 modi rispettivamente), per un totale di $15 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 4500$ combinazioni differenti che rispettano le richieste.
Seconda soluzione
Il numero di modi di disporre 2 oggetti su n spazi in modo che non siano consecutivi è $\binom{n-1}{2}$. Si può pensare infatti di disporli senza restrizioni su $n-1$ spazi e poi inserire un nuovo spazio vuoto tra di essi.
Se si tralascia per il momento l'informazione (a), i modi validi di fissare le posizioni delle due cifre uguali e della cifra dispari sono allora $\binom{5-1}{2} \cdot 3 = 18$. Di queste, quelle che non soddisfano l'informazione (a) sono $\binom{4-1}{1} \cdot 1 = 3$ (la cifra dispari è fissata in ultima posizione e la doppia ha i 4 posti restanti a dispozione). In tutto si hanno allora $18 - 3 = 15$ modi di fissare le posizioni che rispettino tutte le informazioni. Per concludere si moltiplica per $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ come in precedenza.

2. La risposta è **(E)**. Consideriamo come aumenta la differenza tra caselle nere e bianche d_k in un so-poko di lato k. Per $k = 3$, la differenza è 7. Ogni volta che vengono aggiunte all'esterno due cornici concentriche (una bianca più interna e una nera più esterna), d_k aumenta di 8 e k aumenta di 4. Per arrivare da un so-poko di lato 3 a lato 203 dobbiamo aggiungere 50 coppie di cornici, quindi $d_{203} = d_3 + 50 \cdot 8 = 407$.

3. La risposta è **(C)**. Evidentemente il triangolo AOD è uguale al triangolo BOC, quindi ha anch'esso area 15. I triangoli ODC e OCB hanno la stessa altezza CH, e poiché la base OD di ODC è 1/3 della base OB di BOC, l'area di ODC è 1/3 dell'area di BOC, cioè $15/3 = 5$.


I triangoli OAB e AOD hanno la stessa altezza AK, e poiché la base OB di OAB è il triplo della base OD di AOD, l'area di OAB è il triplo dell'area di OAD, cioè $3 \cdot 15 = 45$. L'area rel trapezio $ABCD$ sarà quindi $15 + 5 + 15 + 45 = 80$.

4. La risposta è **(D)**. Esaminiamo la situazione di Francesco: perché il sistema ammetta infinite soluzioni è necessario che la seconda equazione sia equivalente alla prima, ovvero che differiscano al più per una costante moltiplicativa. Il termine noto della seconda equazione è $362 = 181 \times 2$ quindi nel caso di Francesco i coefficienti della seconda equazione sono il doppio di quelli della prima, cioè $g = 26$ e $m = 2$. Francesco è nato il 26 febbraio.
Nel caso di Andrea invece le due equazioni devono essere incompatibili e questo accade quando i coefficienti delle incognite sono tra loro proporzionali ma il fattore di proporzionalità non è quello tra i rispettivi termini noti. Questo vuol dire che per Andrea $g = 13m$. Dato che $g \leq 31$ sono possibili due valori di m: 1 e 2. Per $m = 2$ però il sistema ha infinite soluzioni e quindi Andrea è nato il 13 Gennaio.
Si osservi che è possibile affrontare il problema anche per via geometrica interpretando le equazioni come rette nel piano cartesiano e le soluzioni del sistema come le loro intersezioni. Nel caso di Francesco le due equazioni devono rappresentare la stessa retta, nel caso di Andrea devono rappresentare due rette parallele ma distinte. Le conclusioni ovviamente sono le stesse.

5. La risposta è **(A)**. La regola di ricorrenza data nel testo equivale a dire $a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1} = \cdots = a_1 - a_0 = d$ (la differenza tra sue termini succssivi rimane costante) e quindi si riconsce in a_k una progressione aritmetica. Si può quindi ricavare che $a_k = 19 + 6k$ per ogni k (una dimostrazione formale di questo risultato può essere condotta per induzione). Perché questo numero sia multiplo di 19, è necessario e sufficiente che $6k$ sia un multiplo di 19, e questo avviene per la prima volta per $k = 19$.

6. La risposta è **(B)**. Lorenza nota che sia il primo giorno che il secondo tutti e 2008 gli abitanti fanno affermazioni contrastanti, segno che almeno 2007 di loro stanno mentendo. Ovvero al più

uno dice la verità il primo giorno, e al più uno il secondo. Da ciò si deduce che almeno 2006 hanno mentito entrambi i giorni, ovvero ci sono almeno 2006 furfanti, e che in tutto c'è al più un solo cavaliere. In realtà il primo giorno esattamente uno ha detto la verità, perché se avessero tutti mentito non ci sarebbero furfanti sull'isola, contrariamente a quanto già dedotto. Il secondo giorno invece nessuno può aver detto la verità, infatti non ci sono cavalieri. Se ce ne fossero l'unico cavaliere sarebbe il primo abitante, che il secondo giorno ha detto che c'è esattamente un cavaliere. Ma questo ha affermato il primo giorno che c'è un solo furfante, quando ce ne sono almeno 2006. Ora abbiamo 2007 mentitori il primo giorno e 2008 il secondo, perciò deduciamo che 2007 sono furfanti e quell'unico che ha detto la verità il primo giorno è un paggio. (in particolare è esattamente il penultimo abitante ad essere stato interrogato).

7. La risposta è **(D)**. Un numero è divisibile per 11 se e solo se è divisibile per 11 la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari.
   Sia a la somma delle 3 cifre di posto dispari e b la somma delle 2 cifre di posto pari. Siccome $a+b=1+2+4+7+9=23$ è dispari, anche $a-b$ sarà dispari e quindi diverso da 0. Inoltre, dal fatto che b vale al massimo $7+9=16$ e come minimo $1+2=3$, segue che $a-b=(23-b)-b=23-2b$ è compreso tra -9 e 17. Se $a-b$ deve essere divisibile per 11, l'unica possibilità è quindi che sia 11, ma allora $11=a-b=23-2b$ da cui $b=6$. L'unica coppia di cifre tra quelle considerate che dà somma 6 è $\{2,4\}$.
   In conclusione si ottiene un multiplo di 11 tutte e sole le volte che le cifre di posto pari sono il 2 e il 4. Complessivamente le combinazioni sono 12 perché vi sono 2 modi per fissare l'ordine delle cifre di posto pari e $3!=6$ modi per fissare l'ordine delle altre 3.

8. La risposta è **(D)**. Gli archi tracciati all'interno del cerchio hanno lo stesso raggio del cerchio stesso. Di conseguenza, per equiscomposizione del cerchio, l'area della parte ombreggiata in figura 1 è uguale a quella della parte ombreggiata in figura 2, ovvero è pari all'area dell'esagono inscritto in una circonferenza di raggio unitario. Il lato dell'esagono è pari al raggio (cioè vale 1); l'area dell'esagono è 6 volte quella del triangolo OPQ.

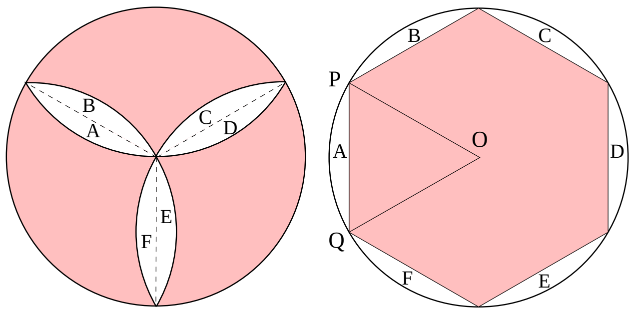


figura 1 figura 2

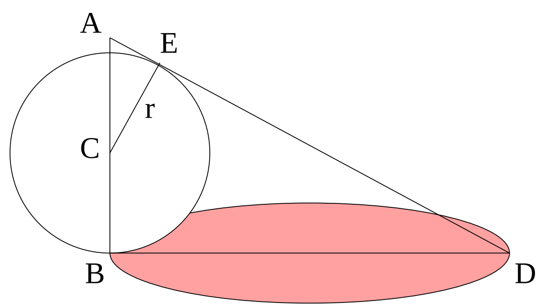
   Di conseguenza,
$$\mathrm{A}_{\text{esagono}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

9. La risposta è **(E)**. La lancetta delle ore è orizzontale se l'orologio segna le 3 o le 9. Sia K l'ora segnata dall'orologio subito prima dell'ultimo lancio di dado. Se K è uno dei 6 numeri compresi tra 3 e 8, vi è esattamente 1 risultato del dado su 6 che permetterebbe di raggiungere le 9 e non ve n'è nessuno che permetta di raggiungere le 3. Se K è uno dei 6 numeri compresi tra 9 e 12 o tra 1 e 2, vi è esattamente 1 risultato del dado su 6 che permetterebbe di raggiungere le 3 e non ve n'è nessuno che permetta di raggiungere le 9.
   La totalità delle combinazioni di 2008 lanci di dado può essere divisa in 12 gruppi a seconda della situazione prima dell'ultimo lancio. Per $i=1,2,\ldots,n$, sia n_i il numero di combinazioni tali che $K=i$; sia poi a_i il numero di combinazioni tali che $K=i$ e la lancetta sia orizzontale dopo l'ultimo lancio.
   Per quanto detto sopra, per ciascuno di questi gruppi la probabilità che la lancetta venga portata in posizione orizzontale con l'ultimo lancio è $\frac{1}{6}$, quindi per ogni i, si ha che $\frac{a_i}{n_i}=\frac{1}{6}$, ovvero che $n_i=6a_i$. Queste relazioni permettono di ottenere facilmente la probabilità complessiva che la lancetta alla fine sia orizzontale, ovvero:
$$\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{12}}{n_1+n_2+\cdots+n_{12}} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{12}}{6a_1+6a_2+\cdots+6a_{12}} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{12}}{6(a_1+a_2+\cdots+a_{12})} = \frac{1}{6}.$$

10. La risposta è **(C)**. È possibile determinare esplicitamente i valori delle soluzioni dell'equazione. Si tratta infatti di una equazione reciproca di prima specie (equazioni in cui il coefficiente di x^k è uguale a quello di x^{n-k}, dove n è il grado dell'equazione e $k = 0, 1, \ldots, n$.) ed hanno la caratteristica che se sono soddisfatte da un certo valore x_0 lo sono anche da $1/x_0$, da cui il nome "reciproche". La soluzione di equazioni di questo tipo è riconducibile a quella di tre equazioni di secondo grado: l'equazione può essere scritta nella forma $x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-7\right]=0$.
Ponendo $y = x+\frac{1}{x}$ si giunge a $(y^2-2)-2y-7=0$ da cui si determinano due valori di y e quattro della x. Questo modo di procedere porta però a calcoli piuttosto laboriosi: i valori delle soluzioni x_1, x_2, x_3 e x_4 (e quindi anche dei loro reciproci) sono infatti
$$x_{1,2}=\frac{1+\sqrt{10}}{2}\pm\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad x_{3,4}=\frac{1-\sqrt{10}}{2}\pm\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}.$$
a due a due reciproche, per cui
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=x_2+x_1+x_4+x_3=1+\sqrt{10}+1-\sqrt{10}=2.$$
Si arriva molto più rapidamente al risultato ricordando che se x_1, x_2, x_3 e x_4 sono soluzioni dell'equazione, allora $x^4-2x^3-7x^2-2x+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. Svolgendo i calcoli al secondo membro si nota che il coefficiente di terzo grado del prodotto è $-(x_1+x_2+x_3+x_4)$ che per confronto col primo membro vale -2. Dato che l'equazione è reciproca possiamo concludere subito che $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=2$.
Si noti infine che è possibile risolvere l'esercizio anche senza tenere conto che l'equazione è reciproca: sempre calcolando il prodotto $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ si osserva che
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}=\frac{-\text{coeff di primo grado}}{\text{termine noto}}=\frac{2}{1}.$$

11. La risposta è **(E)**. L'interruttore di posto n viene toccato una volta per ogni divisore positivo di n. Quindi la n-esima lampadina rimane accesa alla fine se e solo se n ha un numero dispari di divisori. Questo succede solo per i quadrati perfetti: se infatti n non è un quadrato perfetto, possiamo dividere in coppie i suoi divisori formando tutte le coppie del tipo $(d, n/d)$, e questo ci dice che essi sono in numero pari. Se $n = m^2$ è un quadrato perfetto, possiamo dividere in coppie tutti i suoi divisori tranne m accoppiando di nuovo $(d, m^2/d)$: quindi m^2 ha un numero dispari di divisori. A questo punto, è semplice verificare che l'unico quadrato perfetto tra le possibili risposte è $97^2 = 9409$.

12. La risposta è **(C)**. La lunghezza dell'ombra dell'asta è il doppio della sua altezza quindi $AB = \frac{1}{2}BD = 5\text{m}$. Per il teorema di Pitagora $AD = 5\sqrt{5}$ m.
I triangoli ABD e AEC sono simili per cui $AC\colon AD = CE\colon BD$. Posto $r = CE$ si ha: $(5-r)\colon 5\sqrt{5} = r\colon 10$ da cui $r = 10\sqrt{5}-20$.

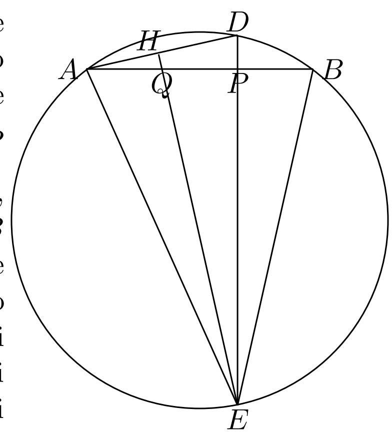


13. La risposta è 71. Per la condizione c) il prodotto delle due cifre deve essere un numero primo. Perché questo avvenga è necessario che una delle due cifre sia 1, altrimenti il numero che ne deriva moltiplicando è composto.
Supponendo che 1 sia la cifra delle decine, la condizione a) restringe le possibilità ai soli 11, 13, 17, 19, unici numeri primi tra 10 e 19 compresi. Scambiando l'ordine delle cifre 11, 31, 71 sono primi mentre $91 = 13 \times 7$. Di conseguenza il più grande numero che soddisfa le tre condizioni a), b), c) è 71.

14. La risposta è 45. Ponendo $x = AJ$, $y = AK$, $x' = JB$ e $y' = KC$, si ha, usando il secondo teorema di Euclide, $x \cdot x' = y^2$ e $y \cdot y' = x^2$. Moltipmicando membro a membro si ha $(x \cdot x')(y \cdot y') = (x' \cdot y')(x \cdot y) = x^2 \cdot y^2$, da cui $x' \cdot y' = x \cdot y = 45$.

15. Per prima cosa escludiamo tutte le coppie (x, y) che annullano il denominatore, cioè imponiamo le condizioni $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $x + y \neq 0$.
Sotto tali condizioni l'espressione $xy(x + y)$ è diversa da 0 quindi, moltiplicando per essa ambo i membri della relazione assegnata, si ottiene che essa equivale a $4xy = (x + y)^2$, cioè a $(x - y)^2 = 0$, cioè a $x = y$.
Quindi le coppie cercate sono tutte e sole quelle che soddisfano $x = y$, a cui però va tolta la coppia $(0, 0)$.
Seconda soluzione
La relazione assegnata è omogenea, rimane cioè invariata se al posto di (x, y) si mette $(\lambda x, \lambda y)$, con $\lambda \neq 0$.
Ciò significa che, vale in un punto (x_0, y_0) diverso dall'origine se e solo se vale su tutti i punti della retta passante per l'origine e per (x_0, y_0) (eccettuato l'origine).
Di conseguenza, dopo aver osservato che le rette $x = 0$, $y = 0$ e $y = -x$ si possono già escludere in quanto fanno annullare qualche denominatore, basterà chiedersi per quali rette del tipo $y = mx$ la relazione assegnata è soddisfatta.
Sostituendo mx al posto di y nella relazione assegnata si ottiene
$$\frac{4}{x + mx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{mx},$$
che, essendo $x \neq 0$, diventa
$$\frac{4}{1 + m} = 1 + \frac{1}{m},$$
che ha come unica soluzione $m = 1$.
Ciò significa che l'insieme di tutte e sole le soluzioni della relazione assegnata è costituito dai punti della retta $y = x$ privata di $(0, 0)$.
Terza soluzione
Dopo aver riconosciuto l'omogeneità della relazione procedendo come nella seconda soluzione, per mostrare che l'unica retta *buona* è $y = x$, si può anche verificare che intersecando la relazione assegnata con un'altra, come $x^2 + y^2 = 1$, che intersechi tutte le rette per l'origine, si ottengono solo soluzioni con ascissa e ordinata uguali.

16. Sia H il punto in cui la retta EQ interseca AD; si deve dimostrare che l'angolo $A\widehat{H}E$ è retto. Tracciamo il segmento BE. Il triangolo BQE è isoscele perché l'altezza EP è anche mediana; infatti P, piede dell'altezza EP, è punto medio di BQ in quanto $PQ = \frac{1}{2}AP = PB$. EP è pertanto anche bisettrice dell'angolo $B\widehat{E}Q$, ossia i due angoli $P\widehat{E}Q$, $P\widehat{E}B$ sono congruenti. Poi, sono congruenti gli angoli $D\widehat{E}B$, $D\widehat{A}B$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco; segue che sono congruenti gli angoli $P\widehat{E}Q$, $D\widehat{A}P$. I triangoli AHQ, EPQ hanno dunque gli angoli in A e in E congruenti; ancora, sono congruenti i rispettivi angoli con vertice in Q, perché opposti al vertice. I triangoli AHQ, EPQ sono pertanto simili, ed in particolare sono congruenti gli angoli con vertici in P e H. Poiché l'angolo $E\widehat{P}Q$ è retto per costruzione, è retto anche l'angolo $A\widehat{H}E$, come si voleva dimostrare.



17. Un facile controesempio per il secondo punto è $a = c = e = 2$, $b = d = f = 4$. Per la prima parte, proponiamo alcune soluzioni differenti.
Prima soluzione
Si noti innanzitutto che il prodotto e il quoziente (quando questo è un numero intero) di due cubi perfetti è ancora un cubo perfetto. La quantità
$$\frac{(ab)(cd)(ef)(ga)}{(bc)(de)(fg)} = a^2$$

allora è un cubo perfetto. Ora, se a^2 è un cubo perfetto, anche a è un cubo perfetto: difatti, a^2 è un cubo perfetto vuol dire che, detta $a = p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r}$ la scomposizione in fattori primi di a, $2t_i$ è multiplo di 3 per ogni i; ma allora anche t_i è multiplo di 3 per ogni i, che significa che a è un cubo perfetto. Sappiamo quindi che a e ab sono cubi perfetti; ne segue che anche b lo è. Sappiamo adesso che b e bc sono cubi perfetti, ne segue che anche c lo è e così via.

Seconda soluzione

Notiamo che, per un numero, essere un cubo perfetto vuol dire che per ogni primo p_i che compare con esponente t_i nella sua fattorizzazione, allora t_i è multiplo di 3. Fissiamo allora un primo p e chiamiamo $t_a, t_b, \ldots, t_g$ gli esponenti con cui esso compare nella fattorizzazione di $a, b, \ldots, g$. Le condizioni del problema ci dicono che

$$t_a + t_b, t_b + t_c, t_c + t_d, t_d + t_e, t_e + t_f, t_f + t_g, t_g + t_a \tag{1}$$

sono multipli di 3.

Supponiamo per assurdo che ci sia uno dei t che non è multiplo di 3. A meno di cambiare nome ciclicamente agli interi coinvolti, possiamo supporre che sia t_a. Supponiamo che il resto della divisione di t_a per 3 sia 1 (il caso in cui è 2 si fa esattamente nello stesso modo). Allora, dal fatto che la prima delle espressioni qui sopra è multipla di 3 segue che il resto della divisione per 3 di t_b è 2; quindi, dalla seconda segue che t_c ha resto 1, e poi analogamente che t_d ha resto 2, t_e ha resto 1, t_f ha resto 2, e t_g ha resto 1. Ma l'ultima relazione dice che $t_g + t_a$ è multiplo di 3, quando abbiamo provato che sia t_a che t_g hanno resto 1, il che è impossibile. Questo completa la dimostrazione per assurdo.

Terza soluzione

Il fatto che le quantità in (1) siano multiple di 3 si può esprimere come il seguente sistema lineare nel campo degli interi modulo 3.

$$\begin{aligned} t_a + t_b &\equiv 0 \mod 3 \\ t_b + t_c &\equiv 0 \mod 3 \\ t_c + t_d &\equiv 0 \mod 3 \\ t_d + t_e &\equiv 0 \mod 3 \\ t_e + t_f &\equiv 0 \mod 3 \\ t_f + t_g &\equiv 0 \mod 3 \\ t_g + t_a &\equiv 0 \mod 3 \end{aligned}$$

Tale sistema ha per matrice associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel campo degli interi modulo 3, questa matrice è invertibile (perché ha determinante non nullo), quindi il sistema ha solo la soluzione banale $t_a = t_b = \ldots = t_g = 0$.

Nota. Si osservi che la matrice che si otterrebbe trattando allo stesso modo il secondo punto del problema è invece non invertibile.