UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2006

GARA di SECONDO LIVELLO

16 febbraio 2006

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 10 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 11 al numero 15 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 12**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:____________________ COGNOME:____________________

Indirizzo:____________________ Città:____________________

SCUOLA:____________________ CLASSE:______ Città:____________________

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–10)		$\times 5 =$	
numero delle risposte esatte (11–15)		$\times 8 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
ENI

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Un numero si dice "moderno" se, in base 10, può essere espresso concantenando "un po'" di scritture decimali di 2006: ad esempio 200620062006 è moderno, mentre 20200606 e 2006200 non lo sono. Quante cifre ha il più piccolo quadrato perfetto moderno positivo?
(A) 32 **(B)** 64 **(C)** 100 **(D)** 1000 **(E)** non esiste un tale numero.

2. Consideriamo le quattro affermazioni seguenti:
Manuela ha un cane e un gatto.
Manuela non ha né un cane né un gatto.
Se Manuela ha un cane, allora ha anche un gatto.
Manuela non ha un cane, ma ha un gatto.
Quante di esse, al massimo, possono essere false contemporaneamente?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

3. Quale fra le seguenti espressioni è equivalente a $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$?
(A) $3x^2(y + z) + 3y^2(x + z) + 3z^2(x + y)$
(B) $3x(y + z)^2 + 3y(x + z)^2 + 3z(x + y)^2$
(C) $3(x + y)(x + z)(y + z)$
(D) $3x(y^2 + z^2) + 3y(x^2 + z^2) + 3z(x^2 + y^2)$
(E) $3xy(1 - z) + 3xz(1 - y) + 3yz(1 - x)$.

4. Gli abitanti di un'isola sono o furfanti o cavalieri: i cavalieri dicono sempre la verità, i furfanti mentono sempre. Una sera al bar, Alberto dice: *"Bruno è un cavaliere"*; Bruno dice: *". . . . . . tutti e tre cavalieri"* (in quel momento passa un camion e non si capisce se Bruno ha detto *"Siamo tutti. . . "* o *"Non siamo tutti. . . "*); Carlo dice: *"Bruno ha detto che non siamo tutti e tre cavalieri"*. Quanti di loro sono cavalieri?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** non è possibile determinarlo.

5. Silvia ha 2006 tessere identiche a forma di triangolo equilatero e vuole disporle tutte sul tavolo senza sovrapporle e in modo che ciascuna abbia esattamente *due* lati in comune con altre due tessere. Può riuscire nel suo intento? Poteva riuscirci l'anno scorso, quando aveva 2005 tessere?
(A) È impossibile in entrambi i casi.
(B) È possibile con 2005 tessere, ma non con 2006.
(C) È possibile con 2006 tessere, ma non con 2005.
(D) In questi due casi è possibile, ma tra i numeri maggiori di 12 ce n'è almeno uno per cui non è possibile.
(E) È possibile per tutti i numeri di tessere maggiori di 12.

6. Si consideri il piano tassellato con triangoli equilateri, e sia F_0 uno qualsiasi di essi. Si costruisce una sequenza di figure sempre più grandi in questo modo: F_1 è il poligono che si ottiene aggiungendo ad F_0 la cornice formata da tutti i triangoli della tassellazione che toccano F_0 (per un lato o per un vertice), F_2 è il poligono che si ottiene aggiungendo ad F_1 la cornice formata dai triangoli che toccano F_1, e analogamente si costruiscono i successivi sino ad F_{10}. Da quanti triangoli della tassellazione è composto quest'ultimo poligono?
(A) 541 **(B)** 661 **(C)** 691 **(D)** 721 **(E)** 841.

7. Due circonferenze con lo stesso raggio si intersecano in X e Y. Sia P un punto su un arco XY di una circonferenza interno all'altra. Sapendo che il segmento XY è lungo 3 e che l'angolo $X\widehat{P}Y$ misura 120°, qual è l'area dell'intersezione tra i due cerchi?
(A) $2(\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3})$ **(B)** $3(\pi - \sqrt{3})$ **(C)** $\frac{1}{2}(3\pi - \sqrt{3})$ **(D)** $2(\pi - \frac{2}{3}\sqrt{3})$ **(E)** $2(\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3})$.

8. Sia ABC un triangolo e sia A' il simmetrico di A rispetto a BC; sia poi DAA' simile ad ABC e sia D' il simmetrico di D rispetto a AA'. Sapendo che il prodotto delle aree dei quadrilateri $ABA'C$ e $ADA'D'$ è 16, si può dire che AA' . . .
(A) è 1 **(B)** è $2\sqrt[4]{2}$ **(C)** è 2 **(D)** è $2\sqrt{2}$ **(E)** non è univocamente determinato dai dati.
(Nota: la similitudine tra DAA' e ABC va intesa in modo ordinato : $DA/AB = AA'/BC = A'D/CA$)

9. Quanti simboli di radice quadrata, come minimo, devono comparire nell'espressione $\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{123.456.789}}}$ affinché il risultato sia minore di 2?
(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9.

10. Quanto vale $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$?
(A) $\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ **(B)** 1 **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** $\sqrt[3]{4}$ **(E)** $2\sqrt[3]{2}$.

Problemi a risposta numerica – 8 punti

11. I membri di una tribù hanno dieci dita alle mani e nove ai piedi e quindi contano indifferentemente in base 10 o 19. Nella loro cultura matematica, un numero intero positivo è detto "sacro" se in entrambe le basi si scrive con le stesse due cifre (comprese tra 1 e 9). Quanti sono i numeri sacri?

12. Sulla lavagna c'è scritto un numero di 17 cifre composto da soli 1 e 2. Paolo entra e riscrive il numero in sequenza inversa, allineandolo sotto il precedente. Gianni entra e scrive sotto ogni colonna la cifra massima che compare in quella colonna. Alberto entra e scrive sotto ogni colonna la cifra minima che compare in quella colonna, poi cancella le prime due righe. Carla entra e trova scritti i numeri 12212212221221221 e 11211111211111211 e le viene spiegato che cosa hanno fatto Paolo, Gianni e Alberto. Quanti sono i diversi numeri che potevano essere scritti sulla lavagna come primo numero?

13. Sia $ABCD$ un parallelogramma. Si sa che il lato AB misura 6, l'angolo $B\widehat{A}D$ misura $60°$ e l'angolo $A\widehat{D}B$ è retto. Sia P il baricentro del triangolo ACD. Calcolare il valore del prodotto delle aree del triangolo ABP e del quadrilatero $ACPD$.

14. Una piramide a base quadrata ha il lato di base lungo $\sqrt{3}$ e tutti gli spigoli delle facce laterali sono lunghi $\sqrt{2}$. Quanti gradi misura l'angolo fra due spigoli non appartenenti alla stessa faccia laterale?

15. Quanti sono i numeri di cinque cifre (cioè fra 10000 e 99999) che non contengono zeri e sono multipli di 12?

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $k \geq 1$ un numero naturale. Determinare in funzione di k il numero di interi positivi n con le seguenti proprietà:

(a) in base dieci si scrivono con k cifre, tutte dispari;

(b) sono divisibili per 5, e il quoziente $\frac{n}{5}$, scritto in base dieci, ha ancora k cifre, tutte dispari.

SOLUZIONE

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $ABCD$ un quadrilatero; chiamiamo E l'intersezione (distinta da A) tra le circonferenze di diametri AB e AC ed F l'intersezione (sempre distinta da A) tra le circonferenze di diametri AC e AD. Dimostrare che :

(a) se $E\widehat{A}D = 90°$ allora BC è parallelo a AD

(b) se $E\widehat{A}D = F\widehat{A}B = 90°$ allora $ABCD$ è un parallelogramma

(c) se $ABCD$ è un parallelogramma allora $E\widehat{A}D = F\widehat{A}B = 90°$.

SOLUZIONE

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2006

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
E	E	C	A	C	B	E	D	A	B	4	16	27	120	4374

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 12.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate o non contenenti alcuna idea utile alla soluzione del problema e 12 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette. A titolo indicativo, forniamo una scaletta di punteggi per la correzione.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 16 si assegnino:

3 punti a chi si accorge che la prima cifra da sinistra è 1;

2 punti a chi afferma - anche senza dimostrazione - che le cifre di $\frac{n}{5}$, escluso la prima da sinistra, possono essere solo 1, 5 e 9;

4 punti a chi dimostra che le cifre di $\frac{n}{5}$, escluso la prima da sinistra, possono essere solo 1, 5 e 9;

2 punti a chi deduce che i numeri possibili sono 3^{k-1};

1 punto a chi, trovati i valori possibili delle cifre, afferma che tutte le scelte vanno bene.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 17 si assegnino:
per il punto (a) interamente svolto: 6 punti;
per il punto (b) interamente svolto: 3 punti;

per il punto (c) interamente svolto: 3 punti.
Punteggi parziali per il punto a):
- per l'osservazione che i centri delle circonferenze sono i punti medi e dunque la loro congiungente è parallela a BC: 2 punti
- osservare che AE è corda comune alle due circonferenze e quindi perpendicolare alla congiungente i centri : 3 punti (se con il precedente ma senza conclusione: 2 punti)
Punteggi parziali per il punto (b) - osservare il fatto che $F\widehat{A}B = 90°$ implica che AB è parallelo a CD: 1 punto
Punteggi parziali per il punto (c) - osservare la reversibilità di uno solo dei due teoremi (Talete o corda perpendicolare alla congiungente i centri): 1 punto

1. La risposta è **(E)**. Un numero moderno è sempre divisibile per 2006, e il quoziente è della forma 1000100010001... 10001, quindi dispari. Un numero moderno è quindi sempre pari, ma non è mai divisibile per 4, e non può quindi essere un quadrato perfetto.

2. La risposta è **(E)**. Le affermazioni *"Manuela ha un cane e un gatto"*, *"Manuela non ha né un cane né un gatto"* e *"Manuela non ha un cane, ma ha un gatto"* sono tra loro incompatibili. L'affermazione *"Se Manuela ha un cane, allora ha anche un gatto"* è vera esattamente quando una (ed una sola) delle altre tre affermazioni è vera; perciò è falsa, insieme con le altre tre, esattamente quando *"Manuela ha un cane, ma non ha un gatto"*. Dunque il numero massimo di affermazioni false è 4.

3. La risposta è **(C)**. Svolgendo il cubo, si ha $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 = 6xyz+3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2+3y^2z+3yz^2 = 3xy(x+y+z)+3xz(x+y+z)+3yz(y+z) = 3x(x+y+z)(y+z)+3yz(y+z) = 3(y+z)(x(x+y+z)+yz)) = 3(y+z)(x(x+y)+zx+zy) = 3(y+z)(x(x+y)+z(x+y)) = 3(y+z)(x+z)(x+y)$.
   Seconda Soluzione
   L'espressione $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ contiene il monomio $6xyz$. Così si escludono le risposte **(A)** e **(D)** perché quel monomio non compare, nella risposta **(B)** compare $18xyz$, nella risposta **(E)** compare $-9xyz$ (inoltre questo polinomio non è omogeneo). La risposta è quindi **(C)**.
   Terza Soluzione
   L'espressione $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ è composta da $3^3-3=24$ monomi (senza sommare quelli simili) tutti quanti aventi coefficiente 1. Delle 5 espressioni proposte, la **(A)**, la **(B)**, la **(D)** e la **(E)** sono composte da $3\cdot 2\cdot 3 = 18$ monomi (anche simili fra loro) tutti aventi coefficiente 1, solo la **(C)** è composta da $3\cdot 2^3 = 24$ monomi tutti aventi coefficiente 1.

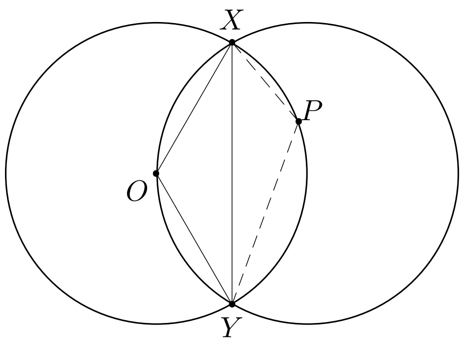
4. La risposta è **(A)**. In base all'affermazione di Alberto, Alberto e Bruno sono dello stesso tipo . Se Carlo è un cavaliere, Bruno dice *"non siamo tutti e tre cavalieri"* che è vera se e solo se Bruno è un furfante. Perciò Carlo è necessariamente un furfante. Poichè l'affermazione di Bruno è del tipo *"(non) siamo tutti e tre cavalieri"*, Bruno ha detto *"siamo tutti e tre cavalieri"* che è falsa, dunque Bruno è un furfante, di conseguenza anche Alberto.
   Notiamo che, senza sapere il tipo di affermazione fatta da Bruno (potrebbe, ad esempio, aver detto *"i baristi sono tutti e tre cavalieri"*), non si può dire che cosa sia Bruno, né di conseguenza che cosa sia Alberto.
   Seconda Soluzione
   Se Carlo è un furfante, Bruno ha detto *"siamo tutti e tre cavalieri"* che è falsa, dunque sono tutti e tre furfanti. Se Carlo fosse un cavaliere, allora Bruno avrebbe effettivamente detto *"non siamo tutti e tre cavalieri"* che può essere vera solo se Alberto è un furfante. Ma allora anche Bruno sarebbe un furfante, e non potrebbe aver fatto un'affermazione vera. Quindi la sola possibilità è che siano tutti furfanti.

5. La risposta è **(C)**. Il testo chiede per quali n è possibile affiancare n tessere in una sequenza chiusa in cui ogni tessera ne ha altre due adiacenti. Facendo delle semplici prove si vede subito che i primi casi in cui è possibile sono $n = 6$ (si ottiene un esagono in cui le tessere hanno tutte un vertice in comune), $n = 12$ (si ottiene una catena di tessere con un buco triangolare in centro, che poi è la differenza tra le figure F_1 ed F_0 del problema successivo), $n = 14$ (si ottiene una catena di tessere con un buco che è l'unione di due triangoli). Rivolgendo la nostra attenzione al "buco", la regione senza tessere lasciata libera dalla catena, è immediato che se la si sceglie a forma di triangolo di lato k, sono necessarie esattamente $6(k+1)$ tessere per circondarla; inoltre non è difficile convincersi che se la si ingrandisce di un solo spazio triangolare, sono necessarie esattamente due tessere in più per circondarla, a patto di non averla ingrandita in una zona non convessa del suo bordo. Quindi ingrandendo di zero, uno o due triangoli un buco triangolare di lato $k-1$ si ottengono regioni che vengono circondate da $6k$, $6k+2$ e $6k+4$ tessere rispettivamente. Potendo scegliere k tra i numeri interi maggiori di 1, si ottiene che tutti gli $n \geq 12$ pari ammettono soluzione.

   Per vedere che non sono possibili soluzioni con n dispari, basta supporre che ne esista una e immaginare di costruirla sopra una scacchiera triangolare infinita che abbia i triangoli colorati alternativamente di bianco e di nero (in modo che due triangoli adiacenti per un lato abbiano sempre colore diverso). Due tessere consecutive saranno per forza adagiate su triangoli di colore diverso, quindi la sequenza di colori associati alle diverse tessere dovrà essere una successione alternata di colori, e dovrà essere chiusa, quindi mostrando lo stesso numero di bianchi e di neri. Ovviamente, se n è dispari ciò non è possibile.

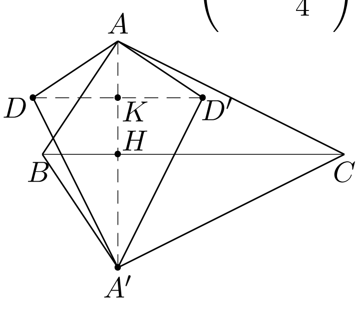
6. La risposta è **(B)**. Per $n \geq 1$ la figura F_n è un esagono avente tre lati lunghi e tre lati corti, alternati fra loro. Ciascuno di quelli lunghi è composto da $n+1$ lati di triangoli, mentre ciascuno di quelli corti è composto da n lati di triangoli. Detto x_n il numero dei triangoli della tassellazione che compongono F_n, calcoliamo l'analogo numero x_{n+1} contando i triangoli della cornice che viene aggiunta a F_n per ottenere F_{n+1}. Questo conteggio fornisce $x_{n+1}-x_n$. Possiamo costruire la cornice in tre stadi: nel primo aggiungiamo un triangolo per ciascuno dei lati dei triangoli che compongono i lati dell'esagono F_n, dunque complessivamente $3(2n+1)$ triangoli; nel secondo stadio aggiungiamo i triangoli che vanno intercalati fra quelli del primo stadio, n su ogni lato lungo e $n-1$ su ogni lato corto, dunque complessivamente $3(2n-1)$; infine, nel terzo stadio aggiungiamo due triangoli per ogni vertice di F_n, cioè 12 triangoli. Il totale vale
$$x_{n+1} - x_n = 3(2n+1) + 3(2n-1) + 12 = 12n + 12 \quad \text{cioè} \quad x_{n+1} - x_n = 12(n+1).$$
Scriviamo ora $x_1 = 1 + 12$ (frutto di un facile conteggio diretto) e la formula precedente per $n = 1, \ldots, 9$ (cioè $x_2 - x_1 = 12 \cdot 2, \ldots\ x_{10} - x_9 = 12 \cdot 10$), sommiamo tutto membro a membro e semplifichiamo il primo membro. Resta scritto che $x_{10} = 1 + 12 + 12 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + \cdots + 12 \cdot 10$. Dunque
$$x_{10} = 1 + 12(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) = 1 + 12 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 661.$$
Seconda Soluzione
La figura F_n è un triangolo equilatero di lato $3n+1$ a cui sono stati tolti 3 triangoli equilateri di lato n appoggiati sui vertici. Quindi F_n è composto da $(3n+1)^2 - 3n^2 = 6n^2 + 6n + 1$ triangolini di lato 1.

7. La risposta è **(E)**. L'intersezione delle due circonferenze è divisa da XY in due figure congruenti, delimitate dagli archi XY, quindi per ottenere il risultato basta calcolare l'area di una di queste due figure e moltiplicare per due. Sia O il centro della circonferenza su cui giace P; per le proprietà degli angoli al centro e alla circonferenza, $X\widehat{O}Y = X\widehat{P}Y = 120°$. Quindi il triangolo XOY è isoscele con gli angoli alla base di $30°$ e dunque $OX = OY = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{XY}{2} = \sqrt{3}$. L'area delimitata dal segmento XY e dall'arco su cui giace P può essere calcolata per differenza come l'area del settore circolare XOY meno l'area del triangolo XOY.



Essendo l'angolo in O di $120°$, l'area del settore circolare è $\frac{120°}{360°}\pi OX^2 = \pi$; nel triangolo XOY l'altezza rispetto a XY è $\frac{XO}{2}$ e dunque la sua area è $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Dunque l'area richiesta è $2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

8. La risposta è **(D)**. Sia H il piede dell'altezza da A su BC, sia K il piede dell'altezza da D su AA'; il prodotto tra le aree dei quadrilateri indicati è $(AH \cdot BC)(DK \cdot AA') = 16$. Abbiamo le seguenti uguaglianze : $AA' = 2AH$ per costruzione e $AA' \cdot AH = BC \cdot DK$ per similitudine tra ABC e DAA'. Sostituendo la seconda nel prodotto si ha $AH \cdot AA' \cdot AH \cdot AA' = 16$, ovvero (sfruttando la prima uguaglianza) $AA'^4 = 4 \cdot 16 = 64$, da cui $AA' = 2\sqrt{2}$.



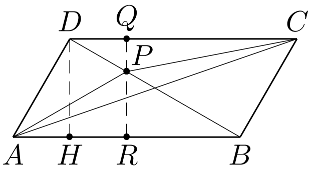
9. La risposta è **(A)**. Dato che, per numeri positivi o nulli, $\sqrt{a} < b$ se e solo se $a < b^2$, la domanda chiede dopo quanti elevamenti al quadrato $\left(\cdots(2^2)^{\cdots}\right)^2 = 2^{2^n}$, il risultato supera 123.456.789. Dato che $2^{10} = 1024 > 10^3$, si trova che $2^{2^5} = 2^{32} > 10^9 = 1.000.000.000 > 123.456.789$. Si osserva inoltre che 4 estrazioni di radice non bastano, in quanto $2^{16} = 65536$.

10. La risposta è **(B)**. Con opportuni raccoglimenti, si scrive il cubo di $r = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ come $r^3 = 4 + 3\sqrt[3]{2^2-5}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) = 4 - 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) = 4 - 3r$. Perciò r verifica la condizione che $r^3 = 4 - 3r$. L'unico, tra i cinque numeri proposti, che verifica la condizione è 1.
Seconda Soluzione
Si nota facilmente che il prodotto dei due radicali è -1, quindi detto x il primo dei due, ci chiediamo se sostituendo a k una delle cinque risposte, l'equazione $x - 1/x = k$ abbia tra le sue soluzioni proprio $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$. L'equazione si riscrive $x^2 - kx - 1 = 0$ e le soluzioni sono $\dfrac{k \pm \sqrt{k^2+4}}{2}$. Questa espressione suggerisce immediatamente di provare per prima la risposta $k = 1$, ed è facile (e un po' stupefacente) scoprire che effettivamente $\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2 \pm \sqrt{5}$.
Terza Soluzione
Si ha $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$. Prendendo $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ e $y = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ si vede subito che $x^3 + y^3 = 4$ e $xy = -1$, quindi $x + y = s$ verifica l'equazione $s^3 = 4 - 3s$. Ora il polinomio $s^3 + 3s - 4$ si annulla in 1, è positivo per $s > 1$, ed è negativo per $s < 1$ (in quanto per s tra 0 e 1 anche s^3 è minore di 1). Quindi la sua sola radice reale è 1.

11. La risposta è 4. Sia n un numero sacro e sia AB la scrittura del numero in base 10. Allora in base 19 per la sacralità esso si scrive come AB o come BA. Il primo caso non genera soluzioni poichè A e B sono diversi da 0, e quindi AB in base 19 è maggiore di AB in base 10 per ogni A, B. Si deve allora avere (scrivendo in base 10) $10A + B = 19B + A$ ovvero $9A = 18B$, da cui $A = 2B$. Poichè $10 > A > 0, 10 > B > 0$ i valori ammessi per B sono allora 1,2,3,4 che dannno luogo ai numeri 21,42,63,84, che sono tutti effettivamente sacri. Vi sono quindi 4 numeri sacri.

12. La risposta è 16. Prima che Alberto cancelli le prime due righe, nella colonna k ($k = 1, \ldots, 17$) compaiono il numero in posizione k, il numero in posizione simmetrica $17 - (k-1)$, il massimo tra i due, il minimo tra i due. Quando massimo e minimo coincidono, il numero in posizione k e il numero in posizione simmetrica $17 - (k-1)$ sono uguali. Questo accade nelle colonne 1, 3, 4, 7, forzatamente nella colonna 9, poi simmetricamente nelle posizioni 11, 14, 15, 17. In queste posizioni i numeri sono certamente 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, rispettivamente. Nelle altre coppie di posizioni simmetriche, sono 1 in una e 2 nell'altra. Perciò i numeri che potevano dare luogo alle due righe che Carla trova sulla lavagna erano $2^4 = 16$.

13. La risposta è 27. Sia H la proiezione ortogonale di D su AB. Dai dati del problema segue subito che $AD = 3$ e $DH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Siano Q, R le proiezioni ortogonali di P su CD e AB, rispettivamente.



Poiché P è il baricentro di ACD, e poiché le diagonali di un parallelogramma si bisecano, si ha $PD = \dfrac{1}{3}BD$. Dalla similitudine dei triangoli BDH, BPR segue $PR = \dfrac{2}{3}DH = \sqrt{3}$. L'area di ABP vale pertanto $S(ABP) = \dfrac{1}{2}AB \cdot PR = 3\sqrt{3}$.
L'area del quadrilatero $ACPD$ si può ottenere per differenza fra l'area di ACD e l'area di PCD. Osserviamo che QR è l'altezza di ACD e PQ l'altezza di PCD.
Allora $S(ACPD) = S(ACD) - S(PCD) = \dfrac{1}{2}CD \cdot QR - \dfrac{1}{2}CD \cdot PQ = \dfrac{1}{2}CD \cdot (QR - PQ) = \dfrac{1}{2}CD \cdot PR = 3\sqrt{3}$. (si nota, incidentalmente, che ABP e $ACPD$ sono equivalenti; ciò resta vero qualunque sia la posizione di P). Il prodotto delle due aree è quindi $(3\sqrt{3})^2 = 27$.

14. La risposta è 120. L'angolo richiesto è angolo al vertice del triangolo isoscele che ha per base la diagonale della base e per lati obliqui due spigoli delle facce laterali. La base misura $\sqrt{6}$ e il rapporto tra il lato obliquo e metà base è $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: questo è il seno di metà dell'angolo richiesto. La misura dell'angolo è 120°.

15. La risposta è 4374. Per determinare quanti sono esattamente i numeri da contare, ricordiamo

innanzitutto che un numero è divisibile per 12 se e solo se è divisibile per 4 e per 3, e i criteri di divisibilità ci dicono che:

- Le ultime due cifre del numero devono formare un multiplo di 4
- La somma delle cifre del numero deve essere divisibile per 3.

L'idea su cui si basa questa soluzione è quella di "generare" tutti i possibili numeri di questo tipo scegliendo nell'ordine le cifre dall'ultima alla prima.

(a) Contiamo innanzitutto in quanti modi possiamo scegliere le ultime due cifre: esse devono formare un multiplo di 4 di due cifre che non contiene zeri, e le possibilità per questa scelta sono 18 (tutti i multipli di 4 inferiori a 100 sono 25, ma da questi vanno scartati 00, 04, 08, 20, 40, 60, 80 che contengono almeno uno zero).

(b) La seconda e la terza cifra del numero possono essere scelte ognuna in 9 modi diversi (tutte le cifre da 1 a 9) indipendentemente da tutte le altre cifre. Ora ci resta da scegliere la prima cifra del numero, e da sistemare la divisibilità per 3.

(c) La prima cifra può essere scelta in 9 modi diversi, ma non tutte quest scelte permettono di ottenere la divisibilità per 3. Però, visto che le nove cifre da 1 a 9 nella divisione per 3 hanno i resti uguali a tre a tre, una volta che abbiamo fissato tutte le cifre precedenti esattamente 3 delle possibili scelte per la prima cifra sono accettabili.

Riassumendo, possiamo scegliere un numero che rispetta le condizioni richieste in $18 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 = 4374$ modi diversi. È semplice controllare che in questo modo generiamo tutti i numeri scelti, in quanto i criteri di divisibilità sono condizioni necessarie e sufficienti.
SECONDA SOLUZIONE
Imponiamo innanzitutto che il numero sia multiplo di 4, allora le sue due ultime cifre dovranno essere uno dei multipli di 4 tra 00 e 99; tali multipli sono 25, ma tra questi ve ne sono 7 che contengono almeno uno zero e quindi vanno scartati. Rimaniamo con 18 possibilità per le cifre finali. Ora dobbiamo scegliere altre tre cifre (non zero) di modo che la somma di tutte e cinque le cifre sia multipla di 3, per garantire la divisibilità per 3. Utilizzando le congruenze modulo 3, osserviamo che, per ogni possibile resto della divisione per 3, vi sono esattamente 3 numeri tra 1 e 9 che lo danno (1, 4, 7 - 2, 5, 8 - 3, 6, 9). A meno dell'ordine, i vari resti modulo 3 si possono ottenere come somma di 3 resti in questi modi : $0 \equiv 0+0+0 \equiv 1+1+1 \equiv 2+2+2 \equiv 0+1+2 \mod 3$, $1 \equiv 0+0+1 \equiv 0+2+2 \equiv 1+1+2 \mod 3$, $2 \equiv 0+1+1 \equiv 0+0+2 \equiv 1+2+2 \mod 3$. Per tenere conto anche dell'ordine, osserviamo che $0+1+2$ si può permutare in 6 modi, $0+0+0$ e simili non hanno permutazioni, tutti gli altri si possono permutare in 3 modi. Quindi, tenendo conto dell'ordine, ogni resto si può scrivere in 9 modi diversi come somma di 3 resti; quindi, fissato un resto, possiamo realizzare un numero di 3 cifre che dia quel resto e che non contenga 0 in $9 \cdot 3^3$ modi e dunque, indipendentemente da quali ultime due cifre scegliamo, avremo $9 \cdot 3^3$ modi di completare il numero di modo che sia multiplo di 3, senza inserire zeri. In totale avremo perciò $18 \cdot 9 \cdot 27 = 4374$ modi.

16. Il numero di interi positivi n con le proprietà (a) e (b) è 3^{k-1}.
Per dimostrarlo si consideri il numero intero $\frac{n}{5}$ e siano $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ le sue cifre, ossia

$$\frac{n}{5} = a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Per (b) le cifre a_i sono tutte dispari, cioè $a_i \in \{1,3,5,7,9\}$ per ogni $i = 0,1,\dots,k-1$.
Poiché n in base 10 ha esattamente k cifre, si deduce che $a_{k-1} = 1$, perché altrimenti, se fosse $a_{k-} > 1$, si avrebbe

$$n = 5 \cdot \frac{n}{5} \geq 5 \cdot a_{k-1}10^{k-1} \geq 10^k,$$

cioè n avrebbe almeno $k+1$ cifre.
Inoltre, si osservi che per ogni intero a si ha $5a = \frac{a-1}{2}10 + 5$, per cui nel nostro caso, ricordando che $a_{k-1} = 1$, vale

$$n = 5 \cdot \frac{n}{5} = 5(a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0) = 5a_{k-1}10^{k-1} + 5a_{k-2}10^{k-2} \cdots + 5a_1 10 + a_0 =$$
$$5 \cdot 10^{k-1} + \left(\frac{a_{k-2}-1}{2}10 + 5\right) 10^{k-2} + \cdots + \left(\frac{a_1 - 1}{2}10 + 5\right) 10 + \frac{a_0 - 1}{2}10 + 5 =$$
$$5 \cdot 10^{k-1} + \frac{a_{k-2}-1}{2}10^{k-1} + 5 \cdot 10^{k-2} + \cdots + \frac{a_1 - 1}{2}10^2 + 5 \cdot 10 + \frac{a_0 - 1}{2}10 + 5 =$$
$$\left(5 + \frac{a_{k-2}-1}{2}\right) 10^{k-1} + \left(5 + \frac{a_{k-3}-1}{2}\right) 10^{k-2} + \cdots + \left(5 + \frac{a_1 - 1}{2}\right) 10^2 + \left(5 + \frac{a_0 - 1}{2}\right) 10 + 5 \quad (1)$$

Quella scritta sopra, dato che gli a_i sono cifre dispari, è la scrittura decimale di n, perché $0 \leq 5 + \frac{a_i - 1}{2} \leq 9$ e $\frac{a_i - 1}{2}$ è intero per ogni $i = 0, \ldots, k-2$.

Poiché per (a) n ha k cifre dispari, si deduce che $5 + \frac{a_{i-1} - 1}{2}$ deve essere dispari per $i = 1, \ldots, k-1$, ossia a_i può assumere solo i valori 1, 5 e 9.

Ci sono quindi al più tre modi per scegliere a_i, $i = 0, \ldots, k-2$, mentre $a_{k-1} = 1$, cioè ci sono al più 3^{k-1} candidati per $\frac{n}{5}$ e quindi per n.

La formula esplicita (1) mostra altresì che ogni tale scelta fornisce un numero n che soddisfa (a) e (b).

Resta quindi dimostrato che tali numeri sono esattamente 3^{k-1}.

Seconda Soluzione

Notiamo innanzi tutto che, per k naturale fissato maggiore di 0, gli interi positivi che verificano le proprietà (a) e (b) sono tanti quanti gli interi positivi di k cifre tutte dispari la cui moltiplicazione per 5 è ancora di k cifre dispari, dato che la moltiplicazione per 5 è una funzione iniettiva.

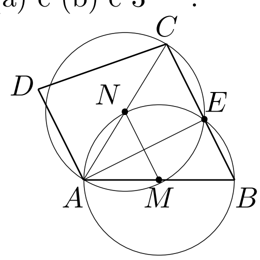
Sia $a_1 a_2 \ldots a_k$ la scrittura in base dieci di un intero con tutte cifre dispari la cui moltiplicazione per 5 sia ancora di k cifre dispari. Ogni moltiplicazione $a_i \cdot 5$ ha 5 come cifra delle unità.

La cifra a_1 è 1, dato che $3 \cdot 5 = 15$ produce già un'unità della potenza di dieci successiva, dunque il prodotto per 5 avrebbe $n+1$ cifre.

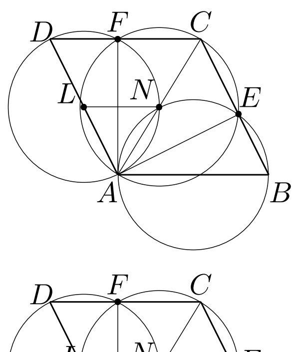
Per $i = 2, \ldots, n$ la cifra delle decine di $a_i \cdot 5$ deve essere pari perchè deve dare una cifra dispari sommato con le 5 unità del numero $a_{i-1} \cdot 5$: dunque a_i è 1, 5, o 9 per $i = 2, \ldots, n$.

Per $k > 0$ naturale, il numero degli interi positivi che verificano le proprietà (a) e (b) è 3^{k-1}.

17. (a) Siano M, N i punti medi di AB e AC rispettivamente; in quanto corda comune ai due cerchi di diametri AB e AC, AE è perpendicolare a MN. Se $E\widehat{A}D = 90°$, AD e MN, in quanto perpendicolari alla stessa retta (quella che contiene EA), sono paralleli; infine per il teorema di Talete, MN è parallelo a BC e dunque BC è parallelo ad AD.



(b) Similmente a quanto fatto nel punto (a), detto L il punto medio di AD, si ha che AF è perpendicolare a NL e, se $F\widehat{A}B = 90°$, anche AB è perpendicolare a AF e dunque parallelo a NL. Applicando come sopra il teorema di Talete si ottiene che allora AB è parallelo a CD. Quindi, se $E\widehat{A}D = F\widehat{A}B = 90°$, si ha che AB è parallelo a CD e AD è parallelo a BC, ovvero $ABCD$ è un parallelogramma.



(c) Di converso, se $ABCD$ è un parallelogramma, detti M, N, L i punti medi di AB, AC, AD come sopra, si ha che AD, BC, MN sono paralleli e dunque tutti perpendicolari a AE, corda comune alle circonferenze di diametri AB e AC (e centri M e N); allo stesso modo, AB, CD, NL sono paralleli e dunque tutti perpendicolari a AF, corda comune alle circonferenze di diametri AC e AD (e centri N, L). Quindi $E\widehat{A}D = F\widehat{A}B = 90°$.