UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

di

Chiara Valenti

An ideal-theoretic approach to GCD-domains

Relatore

Prof.ssa Stefania Gabelli

ANNO ACCADEMICO 2005 - 2006

Ottobre 2006

Classificazione AMS : 13A15, 13C20, 13F05, 13F15

Parole Chiave: Star-operations, Class group, Prüfer v-Multiplication Domains, Krull domains, Unique Factorization Domains, GCD-domains

Le nozioni di massimo comun divisore (MCD) e minimo comune multiplo (MCM) nei numeri naturali risalgono ad almeno 2300 anni fa, quando vennero trattate nel libro VII degli Elementi di Euclide. Euclide descrisse un algoritmo per determinare il massimo comun divisore (o, come disse egli stesso, "la misura") tra due numeri. La sua importanza consiste nel fatto che che tale metodo non richiede la fattorizzazione dei due interi ed inoltre è uno degli algoritmi più antichi conosciuti.

La validità della legge di annullamento del prodotto permette di introdurre per i domini integri i concetti di massimo comun divisore, minimo comune multiplo, elemento irriducibile e primo, fattorizzazione e in definitiva di costruire una Teoria della Divisibilità del tutto simile a quella valida per i numeri interi e i polinomi a coefficienti razionali. Ridefinendo la relazione di divisibilità tra due elementi di un dominio integro R, i domini con massimo comun divisore (domini MCD) sono stati definiti come quei domini integri nei quali esiste il massimo comun divisore per ogni coppia di elementi. Lo scopo di questo lavoro è ridefinire i domini MCD ed altre classi di domini ad essi collegati utilizzando le proprietà degli ideali piuttosto che quelle degli elementi.

La teoria degli ideali nacque con Dedekind nel 1871, quando egli introdusse il concetto di ideale per generalizzare alcune nozioni usate in Teoria dei Numeri per provare i primi casi del Teorema di Fermat. Egli dimostrò che in ogni anello di interi algebrici un ideale si può sempre fattorizzare in modo unico nel prodotto di ideali irriducibili, anche nei casi in cui il teorema di fattorizzazione unica fallisce per gli elementi.

La teoria degli anelli di interi algebrici suggerì l'introduzione di un gruppo abeliano finito: il gruppo delle classi degli ideali. Questo gruppo misura quanto un anello di interi algebrici si discosta dall'essere un dominio a fattorizzazione unica; più precisamente, in un anello di interi algebrici il gruppo delle classi degli ideali è nullo se, e solo se, l'anello è un dominio a fattorizzazione unica.

Il gruppo delle classi degli ideali venne poi generalizzato ai domini di Dedekind e quasi cento anni dopo venne sviluppata una teoria analoga nel contesto più vasto dei domini di Krull: la teoria del gruppo delle classi dei divisori. Questo gruppo venne utilizzato negli anni sessanta per studiare problemi di fattorizzazione in modo analogo a quanto fatto per gli anelli di interi algebrici. Grazie a questa nozione i domini di Krull possono essere visti come una generalizzazione dei domini a fattorizzazione unica e, viceversa, i domini a fattorizzazione unica possono essere caratterizzati come domini di Krull con gruppo delle classi dei divisori nullo, come dimostrò P. Samuel nel 1960 (cfr. [20]). Dunque, in un certo senso, il gruppo delle classi dei divisori misura quanto un dominio di Krull si discosta dall'essere a fattorizzazione unica.

Successivamente, nel lavoro di Claborn e Fossum del 1973 (cfr. [9]) si manifesta l'interesse a costruire una teoria generale del gruppo delle classi, estendendo la teoria del gruppo delle classi dei divisori di un dominio di Krull. Uno degli obiettivi principali era quello di usare tecniche simili a quelle basate sul gruppo delle classi dei divisori, per costruire una teoria funtoriale generale in un ambito più vasto dei domini di Krull.
Nel 1982 [7] A. Bouvier, seguendo un'idea di M. Zafrullah, definì il gruppo delle classi e il gruppo locale delle classi di un dominio integro usando la nozione di t-invertibilità degli ideali divisoriali. Egli si pose il problema di stabilire cosa misurassero questi due nuovi gruppi, ovvero cosa significasse per un dominio R avere gruppo delle classi o gruppo locale delle classi uguale a zero. Nell'impossibilità di rispondere a questa domanda per ogni dominio, egli considerò una classe particolare di domini, chiamati domini pseudo-pruferiani o, con terminologia anglosassone, domini di Prüfer v-moltiplicativi (in breve PvMD).

La classe dei PvMD è piuttosto vasta; essa include i domini di Krull, i domini di Prüfer, i domini MCD, i domini di Bézout e i domini a fattorizza-

zione unica, ed è stata oggetto di numerosi studi, tra cui quelli di P. Jaffard nel 1960 [16] e di M. Griffin nel 1967 [14], sebbene i primi a studiarli sistematicamente siano stati J. L. Mott e M. Zafrullah nel 1981 [18].
Bouvier, nel lavoro citato precedentemente, dimostrò che il gruppo delle classi misura quanto un PvMD si discosta dall'essere un dominio MCD; più precisamente, un dominio R è un dominio MCD se, e solo se, R è un PvMD e $\text{Cl}(R) = (0)$. Dato che per un dominio di Krull questo gruppo delle classi coincide con l'usuale gruppo delle classi dei divisori, questa è una generalizzazione del teorema di Samuel.

Successivamente, nel 1988 [5], D. F. Anderson iniziò per primo il lavoro di generalizzazione della teoria di gruppo delle classi usando le star-operazioni: il concetto di star-operazione era già stato introdotto da Gilmer nel 1972 [12] ed entro il 1980 era già stata riconosciuta l'appartenenza alle star-operazioni di tre importanti operazioni sugli ideali: la v-operazione, la t-operazione e la w-operazione. Nel suo lavoro, Anderson studiò il gruppo delle classi di una generica star-operazione analizzando le sue proprietà e come esse si riflettono sui problemi di divisibilità di un dominio integro.

Grazie a questo tipo di approccio, ogni dominio integro può essere studiato osservando le caratteristiche del suo $*$-gruppo delle classi, facendo variare $*$ tra le star-operazioni.

I risultati più significativi si ottengono per la t-operazione, che è stata oggetto di grande interesse, dovuto al fatto che spesso le proprietà del t-gruppo delle classi $\text{Cl}(R)$ forniscono informazioni utili circa le proprietà di divisibilità del dominio integro R.

L'obiettivo di questo lavoro è ridefinire i domini MCD, ed altre classi di domini ad essi collegati, utilizzando la teoria degli ideali. A questo scopo siamo partiti dal concetto di star-operazione, per poi definirne il gruppo delle classi associato. Questi saranno gli strumenti del nostro lavoro, che nel terzo capitolo raggiungerà i risultati prefissi. D'ora in poi indicheremo con R un dominio integro e con K il suo campo dei quozienti. Inoltre indichiamo con $\mathcal{F}(R)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli di R.

Nel primo capitolo abbiamo introdotto e sviluppato la nozione di star-operazione. Una star-operazione è un'applicazione $\mathcal{F}(R) \longrightarrow \mathcal{F}(R)$, data da $I \longmapsto I^*$, tale che valgono le seguenti condizioni per ogni $x \in K \setminus \{0\}$ e $I, J \in \mathcal{F}(R)$:

(1) $(xR)^* = xR$ e $(xI)^* = xI^*$.

(2) $I \subseteq I^*$ e se $I \subseteq J$ allora $I^* \subseteq J^*$.

(3) $(I^*)^* = I^*$.

Un $I \in \mathcal{F}(R)$ è detto $*$-ideale se $I = I^*$. Se $*_1$ e $*_2$ sono due star-operazioni su R, allora diciamo che $*_1 \leq *_2$ se l'insieme degli $*_2$-ideali è contenuto nell'insieme degli $*_1$-ideali. L'esempio più semplice di star-operazione è la funzione identità, usualmente chiamata d-operazione: $I_d = I$ per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$. Grazie allo studio di alcune proprietà delle star-operazioni, data una star-operazione $*$ abbiamo potuto definire nell'insieme degli $*$-ideali un'operazione $\times$, detta $*$-moltiplicazione: $I \times J = (I^* J^*)^* = (IJ)^*$. L'insieme degli $*$-ideali con la $*$-moltiplicazione è un semigruppo unitario con unità R. Inoltre esso risulta essere ordinato rispetto all'inclusione, chiuso rispetto all'intersezione e tale che per ogni $I, J \in \mathcal{F}(R)$ vale $(I^* + J^*)^* = (I^* + J)^* = (I + J)^*$. È importante osservare che in generale tale semigruppo non è un sottogruppo di $(\mathcal{F}(R), \cdot)$, essendo le due operazioni diverse. In particolare si ha l'uguaglianza solo nel caso $* = d$.

Una star-operazione $*$ si dice di tipo finito se ogni $*$-ideale I^* è uguale all'unione dei J^*, con J ideale frazionario non nullo, finitamente generato e contenuto in I. Ad ogni star-operazione $*$ possiamo associare una star-operazione di tipo finito $*_f \leq *$ ponendo $I^{*_f} = \cup\{J^*; J \in \mathcal{F}(R) \text{ finitamente generato}, J \subseteq I\}$. Una star-operazione $*$ è di tipo finito se, e solo se, $* = *_f$. Tali star-operazioni giocano un ruolo molto importante soprattutto poiché, come vedremo tra poco, mantengono molte delle proprietà degli ideali frazionari.

A questo punto introduciamo per una star-operazione $*$ tre nozioni che generalizzano concetti già noti per gli ideali frazionari: gli ideali $*$-finiti, $*$-primi e $*$-massimali. Un ideale frazionario non nullo I si dice $*$-finito se esiste $J \in \mathcal{F}(R)$ finitamente generato tale che $I^* = J^*$. Uno $*$-ideale primo si dice $*$-primo, mentre uno $*$-ideale intero proprio, massimale nell'insieme degli $*$-ideali interi propri, è detto ideale $*$-massimale. Quando $* = d$ tali concetti coincidono rispettivamente con quelli di ideale finitamente generato, primo e massimale. Dunque la d-operazione risulta essere meramente un caso particolare di una teoria più vasta. Data una star-operazione $*$, denoteremo con $*$-Spec(R) e $*$-Max(R) rispettivamente gli insiemi degli ideali $*$-primi e $*$-massimali di R. Nel caso $* = d$ useremo le notazioni classiche Spec(R) e Max(R). Abbiamo dimostrato che $*$-Max$(R) \subseteq *$-Spec(R). Inoltre, se $*$ è di tipo finito, l'insieme $*$-Max(R) è non vuoto e per ogni $*$-ideale I^* si ha che $I^* = \cap_{M \in *\text{-Max}(R)} I^* R_M$.

Successivamente analizziamo due metodi generali per costruire star-operazioni: il primo utilizza una famiglia di sovranelli $\{R_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ di R tale che $R = \cap_{\delta \in \Delta} R_\delta$, il secondo usa un sottoinsieme di $\mathcal{F}(R)$ verificante alcune proprietà. Grazie al primo metodo, data una star-operazione $*$, si definisce la star-operazione associata $*_w \leq *$: per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$

$$I^{*_w} = \cap_{M \in *_f\text{-Max}(R)} IR_M.$$

La $*_w$-operazione è una star-operazione di tipo finito che si distribuisce sulle intersezioni, cioè tale che $(I \cap J)^{*_w} = I^{*_w} \cap J^{*_w}$ per ogni $I, J \in \mathcal{F}(R)$. Inoltre, per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$, si ha che:

$$I^{*_w} = \cup\{(I : J); J \in \mathcal{F}(R) \text{ finitamente generato, } J^* = R\},$$

dove $(I : J) = \{x \in K \mid xJ \subseteq I\}$ per ogni $I, J \in \mathcal{F}(R)$. Per ogni star operazione $*$ si ha che $*_w \leq *_f$, e $*_f$ si distribuisce sulle intersezioni se, e solo se, $*_f = *_w$.

Infine nell'ultima parte del capitolo vengono introdotti e studiati i tre esempi più famosi di star-operazione: la v-operazione, la t-operazione e la w-operazione. Usando il secondo metodo di costruzione di star-operazioni sull'insieme degli ideali frazionari principali non nulli, è possibile definire la v-operazione: per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$

$$I_v = \cap \{xR;\ x \in K \backslash \{0\},\ \ I \subseteq xR\}.$$

Abbiamo dimostrato che, equivalentemente, $I_v = (R : (R : I))$ e che per ogni star-operazione $*$ si ha che $* \leq v$. Gli v-ideali sono anche detti ideali divisoriali, o divisori. Gli ideali frazionari invertibili sono divisoriali e si ha:

Sia $I \in \mathcal{F}(R)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) I è divisoriale.

(2) I è intersezione di ideali principali.

(3) I è intersezione di ideali invertibili.

(4) I è intersezione di ideali divisoriali.

La t-operazione è la star-operazione di tipo finito associata a v, ovvero $t = v_f$. Dunque, per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$ si ha che $I_t = \cup\{J_v; J \in \mathcal{F}(R), J \subseteq I, J \text{ finitamente generato}\}$. Ne segue che la t-operazione è la più grande star-operazione di tipo finito, ovvero $* \leq t$ per ogni star-operazione di tipo finito $*$.

Abbiamo osservato che l'ipotesi di finitezza per una star-operazione $*$ è necessaria affinché $*$-Max(R) sia non vuoto. A tal fine abbiamo riportato l'esempio di un dominio integro in cui non esistono ideali v-massimali. Basta infatti considerare un dominio di valutazione uno-dimensionale (V, M) che non sia un dominio di valutazione discreta (DVR). In tal caso infatti si dimostra facilmente che ogni ideale frazionario non nullo è un t-ideale, mentre l'unico ideale primo non nullo M è divisoriale se, e solo se, è principale. Dunque $t\text{-Max}(V) = \{M\}$ mentre $v\text{-Max}(V) = \emptyset$, non essendo V di valutazione discreta.

La w-operazione è la star-operazione di tipo finito associata a v che si distribuisce sulle intersezioni. In altre parole $w = v_w$. Inoltre, per ogni star-operazione di tipo finito $*$ tale che si distribuisce sulle intersezioni, $* \leq w$. Per la t-operazione e la w-operazione sono stati riportati inoltre due diversi metodi di costruzione dovuti a J. R. Hedstrom e E. G. Houston ([15]).

Il secondo capitolo è stato dedicato allo studio della $*$-invertibilità e dello $*$-gruppo delle classi. Come fatto in precedenza, introduciamo per le star-operazioni una definizione che estende un concetto ben noto in $\mathcal{F}(R)$: l'invertibilità. Ricordando che, data una star-operazione $*$, l'insieme degli $*$-ideali forma un semigruppo rispetto alla $*$-moltiplicazione, diciamo che $I \in \mathcal{F}(R)$ è $*$-invertibile se esiste $J \in \mathcal{F}(R)$ tale che $I^* \times J^* = R$. In tal caso J^* è unico ed è detto lo $*$-inverso di I. Se $*_1$ e $*_2$ sono due star-operazioni di R tali che $*_1 \leq *_2$, allora un ideale $*_1$-invertibile è anche $*_2$-invertibile. Dunque, per ogni star-operazione $*$, se un ideale è $*$-invertibile, allora è anche v-invertibile. Vengono dimostrate alcune proprietà relative alla $*$-invertibilità: di particolare rilievo è il seguente risultato, che generalizza un teorema ben noto in $\mathcal{F}(R)$.

Sia $*$ una star-operazione di tipo finito su R e sia $I \in \mathcal{F}(R)$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) I è $*$-invertibile.

(2) I è $*$-finito e IR_M è invertibile per ogni $M \in *\text{-Max}(R)$.

(3) I è $*$-finito e IR_M è principale per ogni $M \in *\text{-Max}(R)$.

Data una star-operazione $*$ su R, denotiamo con $*\text{-Inv}(R)$ il gruppo degli $*$-ideali $*$-invertibili di R. Se $*_1$ e $*_2$ sono due star-operazioni di R tali che $*_1 \leq *_2$, allora risulta che $*_1\text{-Inv}(R)$ è un sottogruppo di $*_2\text{-Inv}(R)$. Inoltre, per ogni star-operazione $*$, $*\text{-Inv}(R)$ è un sottogruppo del semigruppo degli ideali divisoriali. Se si denotano con $\text{Prin}(R)$ e $\text{Inv}(R)$, rispettivamente, l'insieme degli ideali principali non nulli e il gruppo degli ideali (d-)invertibili di R, allora per ogni star-operazione $*$ si hanno le seguenti inclusioni:

$$\text{Prin}(R) \subseteq \text{Inv}(R) \subseteq *\text{-Inv}(R).$$

Dunque possiamo definire in modo naturale tre gruppi moltiplicativi:

(1) Lo $*$-gruppo delle classi di R, $\text{Cl}_*(R) = *\text{-Inv}(R)/\,\text{Prin}(R)$.

(2) Lo $*$-gruppo locale delle classi di R, $\text{G}_*(R) = *\text{-Inv}(R)/\,\text{Inv}(R)$.

(3) Il gruppo di Picard di R, $\text{Pic}(R) = \text{Inv}(R)/\,\text{Prin}(R)$.

Osserviamo che per $* = d$ si ha $\text{Cl}_d(R) = \text{Pic}(R)$, anche detto il gruppo delle classi degli ideali di R. Per $* = t$ denoteremo con $\text{Cl}(R)$ e $\text{G}(R)$, rispettivamente, il t-gruppo delle classi e il t-gruppo locale delle classi di R, che chiameremo semplicemente gruppo delle classi e gruppo locale delle classi.
Per ogni star-operazione $*$, vale la successione esatta:

$$(0) \to \text{Pic}(R) \to \text{Cl}_*(R) \to \text{G}_*(R).$$

Per definizione, $\text{Cl}_*(R) = (0)$ se, e solo se, ogni $*$-ideale $*$-invertibile di R è principale, mentre $\text{G}_*(R) = (0)$ se, e soltanto se, ogni $*$-ideale $*$-invertibile di R è invertibile. Dunque $\text{Cl}_*(R)$ e $\text{G}_*(R)$ misurano, rispettivamente, quanto dista R dall'avere tutti gli $*$-ideali $*$-invertibili principali o invertibili.

Nel terzo capitolo, finalmente, raggiungiamo l'obiettivo di tutto il lavoro: ridefinire alcune note classi di domini tramite la teoria degli ideali, utilizzando

proprio i concetti appena introdotti: le star-operazioni e il gruppo delle classi. A questo proposito ricordiamo le relazioni tra le star-operazioni precedentemente incontrate: $d \leq w \leq t \leq v$. Per ognuno dei domini che analizzeremo alcune delle precedenti disuguaglianze diventeranno uguaglianze.
Cominciamo con l'introdurre una classe di domini che giocherà un ruolo fondamentale in tutto il capitolo: i domini di Prüfer v-moltiplicativi, in breve PvMD. Un anello R è detto PvMD se l'insieme degli ideali divisoriali v-finiti è un gruppo rispetto alla v-operazione, ovvero se ogni ideale divisoriale v-finito di R è v-invertibile e il suo v-inverso è ancora v-finito. Daremo diverse caratterizzazioni dei PvMD: tramite la teoria degli ideali, degli anelli ed infine usando le star-operazioni.
La caratterizzazione basata sulla teoria degli ideali segue senza troppe difficoltà dalla definizione; siano $\mathcal{F}_f(R)$ e $\mathcal{D}_f(R)$, rispettivamente, gli insiemi degli ideali frazionari non nulli finitamente generati e degli ideali divisoriali v-finiti:

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) R *è un PvMD.*

(2) $\mathcal{D}_f(R) = t\text{-Inv}(R)$.

(3) Ogni $I \in \mathcal{F}_f(R)$ *è* t*-invertibile.*

(4) Se $I \in \mathcal{F}_f(R)$*, allora* $(I(R : I))_v = R$ *e* $(R : I)$ *è* v*-finito.*

Successivamente caratterizziamo i PvMD mediante la teoria degli anelli:

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) R *è un PvMD.*

(2) R_P *è un dominio di valutazione per ogni* $P \in t\text{-Spec}(R)$.

(3) R_M è un dominio di valutazione per ogni $M \in t$-Max(R).

A questo punto introduciamo i domini di Prüfer, definiti come quei domini integri in cui $\mathcal{F}_f(R)$ è un gruppo. Osserviamo dai seguenti risultati come i domini di Prüfer siano l'esatta copia dei PvMD, ottenuta sostituendo la t-operazione con la d-operazione:

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) R è un dominio di Prüfer.

(2) $\mathcal{F}_f(R) = \mathrm{Inv}(R)$.

(3) R è un PvMD e $t = d$.

Dunque per un dominio di Prüfer R si ha $\mathrm{G}(R) = (0)$.
Analogamente ai PvMD, i domini di Prüfer si possono caratterizzare grazie ai sovranelli:

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) R è un dominio di Prüfer.

(2) R_P è un dominio di valutazione per ogni $P \in \mathrm{Spec}(R)$.

(3) R_M è un dominio di valutazione per ogni $M \in \mathrm{Max}(R)$.

(4) Ogni $I \in \mathcal{F}(R)$ con una base di due elementi è invertibile.

Seguono una serie di risultati che forniscono due ulteriori caratterizzazioni dei domini di Prüfer e che portano all'ultima caratterizzazione dei PvMD basata sulle star-operazioni:

Un dominio integro R è un PvMD se, e solo se, R è integralmente chiuso e $t = w$.

Ovviamente, segue come corollario che:

Un dominio integro R è un dominio di Prüfer se, e solo se, R è integralmente chiuso e $d = t$.

Successivamente ci occupiamo dei domini di Krull. In primo luogo vengono introdotte due classi più vaste di anelli: i domini completamente integralmente chiusi (CIC) e i domini di Mori.
Un dominio R è CIC se l'insieme degli ideali divisoriali $\mathcal{D}(R)$ è un gruppo, ovvero se $\mathcal{D}(R) = v\text{-Inv}(R)$. In tal caso, abbiamo dimostrato che $v\text{-Spec}(R) = v\text{-Max}(R)$.
I domini Noetheriani sono una sottoclasse dei domini di Mori. La classe dei domini di Mori è caratterizzata dalla condizione della catena ascendente sugli ideali divisoriali interi propri, più brevemente detta la condizione della catena ascendente sugli ideali divisoriali. Ricordiamo che questa condizione è equivalente alla condizione del massimo: ogni insieme non vuoto di ideali divisoriali interi propri ha un elemento massimale. In particolare, per un dominio di Mori R si ha $v\text{-Max}(R) \neq \emptyset$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) R soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali divisoriali.

(2) Se $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ è una catena strettamente discendente di ideali divisoriali, allora $\cap_{n \in \mathbb{N}} I_n = (0)$.

(3) Per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$ esiste $J \in \mathcal{F}_f(R)$ tale che $J \subseteq I$ e $I_v = J_v$.

Dunque se R è dominio di Mori allora $\mathcal{D}(R) = \mathcal{D}_f(R)$, le due star-operazioni t e v coincidono ed infine $\text{Cl}_v(R) = \text{Cl}(R)$.

La classe dei domini di Krull è stata definita come la classe intersezione delle classi dei domini CIC e dei domini di Mori. Grazie alla congiunzione delle proprietà ereditate da queste due classi, abbiamo dimostrato che in un dominio di Krull v-Max$(R) = X^{(1)}(R)$, dove con $X^{(1)}(R)$ denotiamo l'insieme degli ideali di altezza uno di R. Inoltre:

Sia R un dominio di Krull. Allora:

(1) $\mathcal{D}(R) = \mathcal{D}_f(R)$ è un gruppo.

(2) R_P è un dominio di valutazione per ogni $P \in X^{(1)}(R)$.

Infine abbiamo dato quattro caratterizzazioni dei domini di Krull:

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) R è un dominio di Krull.

(2) Per ogni $P \in X^{(1)}(R)$, R_P è un DVR (anello di valutazione discreta); $R = \cap_{P \in X^{(1)}(R)} R_P$ e la famiglia $\{R_P; P \in X^{(1)}(R)\}$ ha carattere finito, ovvero per ogni $x \in R \backslash \{0\}$, c'è un numero finito di $P \in X^{(1)}(R)$ tali che $x \in P$ o, equivalentemente, ogni $x \in R \backslash \{0\}$ è non-invertibile in al più un numero finito di R_P.

(3) Ogni $I \in \mathcal{F}(R)$ è t-invertibile.

(4) R è un dominio di Mori e un PvMD.

I domini MCD sono quei domini integri in cui esiste il massimo comun divisore per ogni coppia di elementi non entrambi nulli. Abbiamo dimostrato alcune classiche proprietà del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo per un insieme finito di elementi, e le relazioni che esistono tra queste due nozioni. Il seguente risultato ci permette di ridefinire i domini MCD in termini di ideali:

Se $x, y \in R \backslash \{0\}$, allora $xR \cap yR$ è principale se, e solo se, $(xR + yR)_v$ è principale. In tal caso, se $xR \cap yR = mR$ e $(xR + y)_v = dR$ allora $m = MCM(x, y)$ e $d = MCD(x, y)$.

R è un dominio MCD se, e solo se, I_v è principale per ogni $I \in \mathcal{F}_f(R)$.

Dal risultato precedente segue la caratterizzazione dei domini MCD tramite il gruppo delle classi:

R è un dominio MCD se, e solo se, R è un PvMD e $\mathrm{Cl}(R) = (0)$.

Una sottoclasse dei domini MCD è quella dei domini di Bézout. Infatti si definisce dominio di Bézout un dominio in cui ogni ideale finitamente generato è principale. Analogamente al risultato ottenuto per i domini MCD, si ha:

R è un dominio di Bézout se, e solo se, R è un dominio di Prüfer e $\mathrm{Cl}(R) = (0)$.

In ultimo analizziamo la classe dei domini a fattorizzazione unica (UFD). Un dominio R si dice a fattorizzazione unica se ogni elemento non-invertibile $r \in R\backslash\{0\}$ è scrivibile come prodotto di elementi irriducibili e se vale una delle delle seguenti condizioni equivalenti:

(1) Ogni elemento irriducibile è primo.

(2) Se $x_1 \cdots x_m$ e $y_1 \cdots y_n$ sono due fattorizzazioni in irriducibili di uno stesso elemento $r \in R\backslash\{0\}$, allora $m = n$ e esiste una permutazione $\sigma \in S_n$ tale che per ogni $i = 1, \ldots, n$, y_i e $x_{\sigma(i)}$ sono associati.

(3) R è un dominio MCD.

Dunque la classe degli UFD è contenuta nella classe dei domini MCD. In particolare:

R è un UFD se, e solo se, R è un dominio MCD e soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali principali propri integri.

Abbiamo dimostrato inoltre che un UFD è un dominio di Krull, e abbiamo concluso il capitolo con il seguente risultato:

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) R è un UFD.

(2) R è un dominio di Krull e un dominio MCD.

(3) R è un dominio di Krull e $\mathcal{D}(R) = \mathrm{Prin}(R)$.

(4) R è un dominio di Krull e $\mathrm{Cl}(R) = (0)$.

Bibliografia

[1] Helen E. Adams. Factorization-prime ideals in integral domains. *Pacific J. Math.*, 66(1):2–8, 1976.

[2] D. D. Anderson. Star-operations induced by overrings. *Comm. Algebra*, 16(12):2535–2553, 1988.

[3] D. D. Anderson. GCD domains, Gauss' lemma, and contents of polynomials. In *Non-Noetherian commutative ring theory*, volume 520 of *Math. Appl.*, pages 1–31. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[4] D. D. Anderson and S. J. Cook. Two star-operations and their induced lattices. *Comm. Algebra*, 28(5):2461–2475, 2000.

[5] David F. Anderson. A general theory of class groups. *Comm. Algebra*, 16(4):805–847, 1988.

[6] David F. Anderson. The class group and local class group of an integral domain. In *Non-Noetherian commutative ring theory*, volume 520 of *Math. Appl.*, pages 33–55. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[7] Alain Bouvier. Le groupe de classes d'un anneau intégré. *107 Congrès national des Société savanies, Bresi, sciences. fasc. IV*, pages 85–92, 1982.

[8] Alain Bouvier and Muhammad Zafrullah. On some class groups of an integral domain. *Bull. Soc. Math. Grèce (N.S.)*, 29:45–59, 1988.

[9] Robert M. Fossum. *The divisor class group of a Krull domain.* Springer-Verlag, New York, 1973. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 74.

[10] Stefania Gabelli. Completely integrally closed domains and t-ideals. *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)*, 3(2):327–342, 1989.

[11] Stefania Gabelli. On Nagata's theorem for the class group. II. In *Commutative algebra and algebraic geometry (Ferrara)*, volume 206 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 117–142. Dekker, New York, 1999.

[12] Robert Gilmer. *Multiplicative ideal theory.* Marcel Dekker Inc., New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, No. 12.

[13] Sarah Glaz and Wolmer V. Vasconcelos. Flat ideals. II. *Manuscripta Math.*, 22(4):325–341, 1977.

[14] Malcolm Griffin. Some results on v-multiplication rings. *Canad. J. Math.*, 19:710–722, 1967.

[15] John R. Hedstrom and Evan G. Houston. Some remarks on star-operations. *J. Pure Appl. Algebra*, 18(1):37–44, 1980.

[16] Paul Jaffard. *Les systèmes d'idéaux.* Travaux et Recherches Mathématiques, IV. Dunod, Paris, 1960.

[17] B. G. Kang. Prüfer v-multiplication domains and the ring $R[X]_{N_v}$. *J. Algebra*, 123(1):151–170, 1989.

[18] Joe L. Mott and Muhammad Zafrullah. On Prüfer v-multiplication domains. *Manuscripta Math.*, 35(1-2):1–26, 1981.

[19] Raffaella Palermo. Domini di Bezout e loro gruppo di divisibilitá. Tesi di Laurea, Universitá La Sapienza, 1997. Roma.

[20] P. Samuel. *Lectures on unique factorization domains.* Notes by M. Pavman Murthy. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 30. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.

[21] Eleonora Tocci. Il gruppo delle classi dei divisori di un dominio di Krull. Tesi di Laurea, Universitá Roma Tre, 2003. Roma.

[22] Muhammad Zafrullah. Putting t-invertibility to use. In *Non-Noetherian commutative ring theory*, volume 520 of *Math. Appl.*, pages 429–457. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.