

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Sinforosa Di Lascio

La funzione caratteristica nel calcolo delle probabilità

Relatore esterno : Prof. Giorgio Koch

Relatore : Prof.ssa Lucia Caramellino

ANNO ACCADEMICO 1997 - 1998

Classificazione AMS : 60E10

Parole Chiave : funzioni caratteristiche, analisi armonica, grandi deviazioni.

La funzione caratteristica nel calcolo delle probabilità

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica
di Sinforosa Di Lascio

In molti problemi riguardanti lo studio di una variabile aleatoria X , invece di considerare la misura di probabilità o la funzione di distribuzione si può utilmente ricorrere ad una sua opportuna trasformata. Si tratta di introdurre una nuova funzione che agevoli il compito nelle operazioni quando si debba operare una somma su più variabili aleatorie perché le operazioni sulle trasformate sono più semplici di quelle corrispondenti alla funzione di distribuzione.

Una trasformazione funzionale che permette di calcolare i momenti senza integrare ma in modo più agevole. È opportuno scegliere una trasformata della misura di probabilità in modo che tra le classi delle misure di probabilità e quella delle loro trasformate intercorra una corrispondenza biunivoca sicché l'una delle funzioni individui l'altra.

In questa tesi analizziamo una di queste trasformate che va sotto il nome di funzione caratteristica e ne vedremo alcune applicazioni nel calcolo delle probabilità.

La FUNZIONE CARATTERISTICA di una misura di probabilità P su \mathbb{R} è la funzione

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx P(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx P(dx)$$

i due integrali sono assolutamente convergenti per ogni misura di probabilità P , φ è una funzione a valori complessi con parte reale ed immaginaria finite

per ogni valore di t .

Segue che ogni variabile aleatoria ha funzione caratteristica, inoltre dimostriamo che una distribuzione è univocamente determinata dalla stessa funzione caratteristica e viceversa, si ha:

Se X è una variabile aleatoria con funzione caratteristica φ e se a, b sono due numeri reali con $P\{a\} = P\{b\} = 0$, allora

$$P(a, b) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

e se φ è assolutamente integrabile allora X ha densità

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \varphi(t) dt$$

Risulta nell'analisi di Fourier che la densità p è la trasformata di Fourier di φ e φ l'antitrasformata di p ([?]).

La funzione caratteristica introdotta negli anni '30 si è rivelata uno strumento fondamentale per lo studio di somme di variabili aleatorie. Si ha infatti, che se $S_n = X_1 + \dots + X_n$ è la somma di n variabili aleatorie indipendenti, allora la funzione caratteristica di S_n è il prodotto delle funzioni caratteristiche delle X_i , $i = 1, \dots, n$. Questo ci permette di stimare la funzione caratteristica della somma, conoscendo solo la distribuzione delle individuali X_i , quindi di conoscere la funzione di distribuzione della somma, che è data dalla convoluzione delle distribuzioni, operazione molto più complessa.

Le funzioni caratteristiche sono, inoltre, un utile strumento per stabilire se una data successione di variabili aleatorie converge, si ha infatti un teorema di continuità il quale afferma che una successione di misure di probabilità converge debolmente ad una misura di probabilità P se la successione delle corrispondenti funzioni caratteristiche converge puntualmente alla funzione caratteristica di P .

Applicazioni di questo risultato si hanno nella dimostrazione di due risultati fondamentali nella teoria della probabilità: il teorema limite centrale e la legge dei grandi numeri ([?], [?]).

La prima comprende un insieme di condizioni su n variabili aleatorie sufficienti a garantire la convergenza in distribuzione della loro somma ad una variabile aleatoria gaussiana standard, la seconda comprende un insieme di teoremi che assicura la convergenza della media aritmetica di N variabili aleatorie alla media dei rispettivi valori medi.

Prima dell'introduzione della funzione caratteristica i teoremi fondamentali si riferiscono a situazioni in cui le variabili aleatorie sono indipendenti con la stessa distribuzione, scelte in modo che sia possibile calcolare la distribuzione della somma e poi controllarne il limite.

L'introduzione della funzione caratteristica ha consentito di ampliare la classe della distribuzione degli addendi e abbiamo formulazione del teorema in condizioni più generali ([?]).

In più aggiungendo ulteriori ipotesi si è potuta rimuovere anche l'ipotesi di uguale distribuzione. Nel §4.1 vengono dimostrati due teoremi: uno riguardante la legge dei grandi numeri e l'altro limite centrale con l'ausilio della funzione caratteristica.

Poi viene considerato un modello più generale cioè si considera un insieme triangolare di variabili aleatorie del tipo X_{nk} , $k = 1, 2, \dots, n$ e si cerca di determinare tutte le distribuzioni che possono essere espresse come limite della loro somma: $S = \sum_{k=1}^n X_{nk}$. Ne consegue che i possibili limiti sono le distribuzioni infinitamente divisibili cioè delle distribuzioni che possono essere espresse come somma di n variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite. Di queste particolari distribuzioni saranno analizzate le proprietà ed inoltre vedremo che è possibile descrivere in modo esplicito la funzione caratteristica.

Nel terzo capitolo estendiamo i risultati, già visti nel caso unidimensionale, a distribuzioni a più dimensioni. Le proprietà delle funzioni caratteristiche N -dimensionale sono analoghe al caso unidimensionale e vale ancora un teorema d'inversione.

Un procedimento dovuto a CRAMER-WOLD ci permette di ottenere risultati in più dimensioni riportandoci al caso unidimensionale.

Vengono poi prese in considerazione, per semplicità, variabili aleatorie bidi-

mensionali per analizzare l'ulteriore proprietà delle funzioni caratteristiche, cioè quella che ci permette di caratterizzare l'indipendenza e la scambiabilità delle variabili aleatorie.

Un modello probabilistico può essere assegnato anche tramite la funzione caratteristica, e il teorema di Bochner, che vediamo nel §2.4, ci fornisce le condizioni che tale funzione deve soddisfare. Il teorema di Bochner ha grande estensione in analisi armonica e soprattutto nello studio dei processi stocastici con covarianza stazionaria.

Nell'ultimo capitolo analizziamo in parte questo tipo di processi, ne vediamo la misura stocastica ed affrontiamo le trasformazioni lineari.

Sostituendo nella definizione di funzione caratteristica il numero immaginario it con un numero reale s si perviene alla definizione di funzione generatrice dei momenti. Questa funzione che coincide con la trasformata di Laplace ([?], [?]) della misura di probabilità fornisce con la sua derivata i momenti delle distribuzioni corrispondenti.

A differenza della funzione caratteristica la sua esistenza non è sempre assicurata; per questa ragione, in sviluppi più avanzati, viene quasi sempre preferita la funzione caratteristica.

Nel quinto capitolo è stata presa in esame un'altra trasformata: la trasformata di Cramer cioè la funzione $\lambda_M : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definita come

$$\lambda_M(a) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (as - \log M(s)) \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}$$

dove $M(s)$ è la funzione generatrice dei momenti.

La trasformata di Cramer interviene nella teoria delle grandi deviazioni.

La legge dei grandi numeri per variabili aleatorie indipendenti ed ugualmente distribuite non permette di stimare $P(|\bar{S}_N - E(\bar{S}_N)| \geq \varepsilon)$. A tal fine è sufficiente poter maggiorare $P(\bar{S}_N > m + \varepsilon)$ e $P(\bar{S}_N < m - \varepsilon)$. La teoria delle grandi deviazioni, grazie alla formulazione di Cramer-Chernoff, arriva ad una stima della $P(\bar{S}_N \leq a)$, $a \in \mathbb{R}$, ed è tale che $E(X_1) > a$, e analogamente una stima di $P(\bar{S}_N \geq a)$ quando $E(X_1) < a$.

Secondo i risultati di Cramer-Chernoff, le variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite sono tali che $P(\bar{S}_N \leq a) \equiv m(a)^N$ se $a < E(X_1)$,

dove $m(a)$ è il minimo della funzione generatrice dei momenti di $(X_1 - a)$.
Cramer-Chernoff ci fornisce una stima superiore:

$$\begin{aligned} P(\bar{S}_N \leq a) &\leq e^{-N\lambda_M(a)} && \text{quando} && a \leq E(X_1) \\ P(\bar{S}_N \geq a) &\leq e^{-N\lambda_M(a)} && \text{quando} && a \geq E(X_1) \end{aligned}$$

ed una stima inferiore

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log P(\bar{S}_N \leq a) &\geq -\lambda_M(a) \\ \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log P(\bar{S}_N \geq a) &\geq -\lambda_M(a) \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] Ash. R.B., *Real analysis and probability*, Academy Press, New York 1972.
- [2] Billingsley P., *Probability and Measure*, J. Wiley, 1986.
- [3] Breihmans L., *Probability*, Addison-Wesley, 1968.
- [4] Brezis H., *Analisi Funzionale*, Liguori Editore, Napoli 1986.
- [5] Chung K.L., *A course in probability*, Academic Press, 1974.
- [6] Churchill R.V., *Operational Mathematics*, Mc Graw-Hill Book Company, II ed., 1958.
- [7] Daboni L., *Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica*, UTET, terza ed., Torino 1994.
- [8] D'Agostino E., *Velocità di convergenza per la legge dei grandi numeri: grandi deviazioni di variabili aleatorie indipendenti e catene di Markov*, tesi di laurea in matematica, Università di Roma "La Sapienza", 1989.
- [9] De Finetti, *Teoria della probabilità*, Einaudi, vol.2, 1970.
- [10] Doob, *Stochastic Processes*, Wiley Classics Library Edition, 1990.
- [11] Feller W., *An Introduction to probability theory and its applications*, vol. II, ed. II, J. Miley, 1971.
- [12] Gikhman–Skorokhod, *Introduction to the theory of random processes*, W.B. Saunders Co., 1969.

- [13] Koch G., *La matematica del probabile*, Aracne Editore, Roma 1997.
- [14] Kolmogorov A.V., *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Ed. Mir, Mosca 1980.
- [15] Onicescu O., *Calcolo delle probabilità ed applicazione*, Veschi Editore, Roma.
- [16] Rainville E.D., *The Laplace transform*, The Macnillan Mathematic Paper Books.
- [17] Rudin W., *Analisi reale e complessa*, Boringhieri-Bollati. Torino 1982.
- [18] Shiryaev A.N., *Probability*, Springer, II ed., 1989.
- [19] Tatsuo K., *Fourier series in probability theory*, Academic Press, 1972.