Sintesi

Dato un dominio D con campo dei quozienti K, i polinomi a valori interi su D sono i polinomi a coefficienti in K che, per tutti gli elementi di D, assumono valori in D. L'insieme dei polinomi a valori interi su D forma un anello, che si indica con la notazione $\mathrm{Int}(D)$, e viene definito formalmente come segue:

$$\mathrm{Int}(D) := \{f \in K[X] \mid f(D) \subseteq D\}\,.$$

Si vede immediatamente che $D[X] \subseteq \mathrm{Int}(D) \subseteq K[X]$ e che $\mathrm{Int}(D) = K[X]$ se e solo se $D = K$.

In questa tesi ci occupiamo di una particolare classe di sottoanelli dell'anello dei polinomi a valori interi, introdotta da Manjul Bhargava in uno degli Incontri sui Polinomi a Valori Interi che si sono svolti al CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques) a Marsiglia nel 2000. Se D è un dominio con campo dei quozienti K e x è un elemento di D fissato, l'insieme definito da

$$\mathbb{B}_x(D) := \{f \in K[X] \mid \forall a \in D\,, f(xX + a) \in D[X]\}$$

è detto Anello di Bhargava su D rispetto all'elemento x. Per ogni $x \in D$, $\mathbb{B}_x(D)$ è un sottoanello di $\mathrm{Int}(D)$ che contiene $D[X]$. Inoltre, come ha fatto notare lo stesso M. Bhargava nella sua esposizione al CIRM, al variare di $x \in D$, i $\mathbb{B}_x(D)$ ricoprono $\mathrm{Int}(D)$, cosicché le proprietà algebriche dei $\mathbb{B}_x(D)$ sono strettamente legate a quelle di $\mathrm{Int}(D)$. A titolo esemplificativo, osserviamo che se $\mathrm{Int}(D)$ è banale (i.e. $\mathrm{Int}(D) = D[X]$), allora sono banali tutti i $\mathbb{B}_x(D)$, mentre basta che almeno un $\mathbb{B}_x(D)$ sia non banale, affinché anche $\mathrm{Int}(D)$ sia non banale. A questo punto è naturale pensare di confrontare la struttura dello spettro primo di $\mathrm{Int}(D)$ con quella dello spettro primo di $\mathbb{B}_x(D)$. È chiaro che ogni ideale primo di $\mathrm{Int}(D)$ si contrae su un ideale primo di $\mathbb{B}_x(D)$, tuttavia vi sono degli ideali primi di $\mathbb{B}_x(D)$ che non provengono dallo spettro primo di $\mathrm{Int}(D)$. Inoltre, se V è un DVR, $\mathbb{B}_x(V)$ è un dominio noetheriano, a differenza di quanto accade per $\mathrm{Int}(V)$.

Lo studio approfondito degli anelli di Bhargava è stato sviluppato principalmente da Julie Yeramian, nella sua tesi di dottorato "Anneaux de Bhargava", pubblicata nel 2004. Nel suo lavoro J. Y. si è occupata di determinare le proprietà delle localizzazioni degli anelli di Bhargava, con particolare riguardo al caso in cui essi siano definiti su un dominio noetheriano o su un dominio di Krull; inoltre, J. Y. ha studiato l'esistenza di una base regolare di $\mathbb{B}_x(D)$ su D sia nel caso in cui D è un dominio generico, sia nel caso in cui $D = V$ è un DVR ed, infine, ha descritto lo spettro primo di $\mathbb{B}_x(V)$. Successivamente, nel 2010, I. Al-Rasasi e L. Izelgue, con l'articolo "On the prime ideal structure of Bhargava rings", hanno generalizzato i risultati ottenuti da J. Yeramian sullo spettro primo di un anello di Bhargava su un DVR V al caso di un anello di Bhargava su un dominio generico D. Sebbene la loro descrizione dello spettro primo di $\mathbb{B}_x(D)$ sia solamente parziale, essa dà comunque modo di ricavare delle stime sulla dimensione di Krull di $\mathbb{B}_x(D)$, che sono del tutto analoghe a quelle note sulla dimensione di Krull di $\text{Int}(D)$.

In questa tesi vogliamo riunire in un unico testo il lavoro svolto da Yeramian, Al-Rasasi e Izelgue sulla descrizione degli ideali primi degli anelli di Bhargava. Non seguiamo, però, il corso cronologico degli eventi, poiché riteniamo più corretto, da un punto di vista espositivo, trattare dapprima il caso generale sullo spettro primo di un anello di Bhargava sopra un dominio qualunque e, in seguito, sfruttare i risultati ottenuti da tale trattazione per ricavare le proprietà dello spettro primo di un anello di Bhargava sopra un DVR. Non di meno, ci interessa mostrare quali analogie sussistono tra i risultati riguardanti gli anelli di Bhargava e i risultati riguardanti gli anelli di polinomi a valori interi, per cui sottolineiamo con particolare attenzione i casi in cui le proprietà degli anelli di Bhargava sono le medesime dell'anello di polinomi a valori interi e i casi in cui, invece, i due anelli assumono caratteristiche distinte.

Il nostro lavoro si sviluppa in due capitoli. Nel primo capitolo, interamente dedicato al caso in cui $\mathbb{B}_x(D)$ è definito su un dominio generico D, vengono introdotte le proprietà elementari di un anello di Bhargava, ne vengono analizzate le localizzazioni e lo spettro primo, quindi, vengono date delle stime sulla sua dimensione di Krull. Il primo passo nell'analisi del dominio $\mathbb{B}_x(D)$ consiste nello studio delle sue localizzazioni, poiché, a differenza di quanto accade per $D[X]$, non sempre si verifica l'uguaglianza $S^{-1}\mathbb{B}_x(D) = \mathbb{B}_x(S^{-1}D)$. A tale proposito, vengono dimostrati i seguenti risultati.

Proposizione 1. *Sia D un dominio con campo dei quozienti K e sia $x \in D$ un elemento fissato. Se S è una parte moltiplicativa di D, allora vale l'inclusione $S^{-1}\mathbb{B}_x(D) \subseteq \mathbb{B}_x(S^{-1}D)$.*

Corollario 2. *Sia D un dominio con campo dei quozienti K e sia $x \in D$ un elemento fissato. Se P è un ideale primo di D con campo residuo infinito,* *allora*

$$\mathbb{B}_x(D) \subseteq D_P[X]$$

e sussistono le uguaglianze

$$\mathbb{B}_x(D)_P = \mathbb{B}_x(D_P) = D_P[X]\,.$$

Corollario 3. *Sia D un dominio con campo dei quozienti K, sia P un ideale primo di D e sia $x \in D \setminus P$. Allora*

$$\mathbb{B}_x(D) \subseteq D_P[X]$$

e sussistono le uguaglianze

$$\mathbb{B}_x(D)_P = \mathbb{B}_x(D_P) = D_P[X]\,.$$

I due precedenti Corollari sono particolarmente interessanti, poiché, sotto opportune condizioni, ci permetto di stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli ideali primi di $D[X]$ che si contraggono su un dato ideale primo P di D e gli ideali primi di $\mathbb{B}_x(D)$ che si contraggono sul medesimo ideale primo P di D. Sussiste, infatti, il seguente risultato.

Teorema 4. *Siano D un dominio, x un elemento di D, P un ideale primo di D e Q un ideale primo di $\mathbb{B}_x(D)$ che si contrae su P in D. Indichiamo, inoltre, con (P,φ) un generico upper di P in $D[X]$. Se $\frac{D}{P}$ è infinito o se $x \notin P$, allora*

$$\begin{array}{rcl} Q \cap D[X] = P[X] & \Longleftrightarrow & Q = PD_P[X] \cap \mathbb{B}_x(D), \\ Q \cap D[X] = (P,\varphi) & \Longleftrightarrow & Q = (P,\varphi)D_P[X] \cap \mathbb{B}_x(D). \end{array}$$

In particolare, l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \{Q \in \operatorname{Spec}(\mathbb{B}_x(D)) \,|\, Q \cap D = P\} & \to & \{J \in \operatorname{Spec}(D[X]) \,|\, J \cap D = P\} \\ Q & \mapsto & Q \cap D[X] \end{array}$$

è una corrispondenza biunivoca.

A seguito della descrizione della corrispondenza biunivoca osservata nel precedente Teorema, vengono introdotti due particolari sottoinsiemi di $\mathbb{B}_x(D)$, $P_a[X]$ e $\mathfrak{M}_{(P,\varphi)\,,\,a}$, così definiti:

Definizione 5. Sia D un dominio, siano $x, a \in D$, sia P un ideale primo di D e sia (P,φ) un upper di P in $D[X]$. Poniamo per definizione

$$\begin{array}{rcl} P_a[X] & := & \{f(X) \in \mathbb{B}_x(D) \,|\, f(xX+a) \in P[X]\}\,; \\ \mathfrak{M}_{(P,\varphi)\,,\,a} & := & \{f(X) \in \mathbb{B}_x(D) \,|\, f(xX+a) \in (P,\varphi)\}\,. \end{array}$$

Viene, quindi, dimostrato che $P_a[X]$ e $\mathfrak{M}_{(P,\varphi),a}$ sono ideali primi di $\mathbb{B}_x(D)$ che si contraggono su P e che le loro proprietà sono strettamente legate al comportamento della localizzazione di $\mathbb{B}_x(D)$ rispetto alla parte moltiplicativa $S = D \smallsetminus P$. In particolare, vengono dati i due seguenti risultati, che, rispettivamente, descrivono il caso in cui $x \notin P$ e il caso in cui $x \in P$.

Teorema 6. *Sia D un dominio, siano $x, a \in D$, sia P un ideale primo di D e sia (P, φ) un upper di P in $D[X]$. Se $x \notin P$, allora*

$$P_a[X] \cap D[X] = P[X]$$

e l'inclusione $P_a[X] \subset \mathfrak{M}_{(P,\varphi),a}$ è stretta. Inoltre, $\mathfrak{M}_{(P,\varphi),a}$ si contrae su un upper di P in $D[X]$.

Teorema 7. *Sia D un dominio, siano $x, a \in D$, sia P un ideale primo di D e sia (P, φ) un upper di P in $D[X]$. Se $x \in P$, allora*

1. *l'inclusione $P[X] \subset P_a[X] \cap D[X]$ è stretta;*
2. *$P_a[X] \cap D[X] = \mathfrak{M}_{(P,\varphi),a} \cap D[X] = (P, X - a)$;*
3. *se $\frac{D}{P}$ è infinito, allora $P_a[X] = \mathfrak{M}_{(P,\varphi),a}$.*

Grazie allo studio degli ideali primi $P_a[X]$ e $\mathfrak{M}_{(P,\varphi),a}$ vengono derivate alcune stime sulla dimensione di Krull del dominio $\mathbb{B}_x(D)$; nella fattispecie, viene mostrato che $1 + \dim D \leq \dim \mathbb{B}_x(D)$ e che $\dim D[X] - 1 \leq \dim \mathbb{B}_x(D)$. Inoltre, viene calcolata esattamente la dimensione di Krull di $\mathbb{B}_x(D)$ nel caso in cui D è un dominio di Jaffard. Più precisamente, viene dato il seguente risultato.

Teorema 8. *Sia D un dominio di dimensione finita e sia $x \in D$ un elemento non nullo. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *D è un dominio di Jaffard;*
2. *$\mathbb{B}_x(D)$ è un dominio di Jaffard e $\dim \mathbb{B}_x(D) = 1 + \dim D$.*

Al momento i domini di Jaffard sono la più amplia classe di domini D per i quali è nota la dimensione di Krull di $\mathbb{B}_x(D)$. Lo studio della dimensione di $\mathbb{B}_x(D)$ conclude il primo capitolo.

Il secondo capitolo è interamente dedicato al caso in cui $\mathbb{B}_x(V)$ è definito sopra un DVR V con campo residuo finito [1]. La parte iniziale del capitolo è

[1] Il motivo per cui si richiede che V abbia campo residuo finito è dovuto al fatto che se V è un DVR con campo residuo infinito, allora il dominio $\mathbb{B}_x(V)$ è banale (i.e. $\mathbb{B}_x(V) = V[X]$).

volta a ricavare una base regolare $\{f_n\}$ di $\mathbb{B}_x(V)$ su V, poiché grazie ad essa si può dimostrare che $\mathbb{B}_x(V)$ è una V-algebra finita (e, quindi, che $\mathbb{B}_x(V)$ è noetheriano) e si possono descrivere i generatori degli ideali primi di $\mathbb{B}_x(V)$ che si contraggono sull'ideale massimale M di V. Lo strumento algebrico che viene utilizzato per costruire una base regolare di $\mathbb{B}_x(V)$ su V è dato dalle successioni v-ordinate di ordine α, che sono successioni di elementi in V, definite come segue:

Definizione 9. Siano V un DVR con valutazione v, α un intero positivo e $\{u_n\}$ una successione di elementi in V. Poniamo

$$w_\alpha(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \min\{\alpha, v(u_n - u_i)\}\,.$$

La successione $\{u_n\}_{n\geq 0}$ si dice v-ordinata di ordine α, se per ogni $n \geq 1$ risulta

$$w_\alpha(n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \min\{\alpha, v(a - u_i)\} \quad (\forall a \in V)\,.$$

A partire da una successione v-ordinata di ordine α è sempre possibile ricavare una base regolare $\{f_n\}$ di $\mathbb{B}_x(V)$ su V, come si evince dal seguente risultato.

Teorema 10. *Siano V un DVR con valutazione v, $x \in V$ un elemento di valutazione α, $\{u_n\}$ una successione v-ordinata di ordine α e $t \in V$ un parametro uniformizzante. I seguenti polinomi di $\mathbb{B}_x(V)$:*

$$\begin{aligned} f_0(X) &:= 1\,, \\ f_n(X) &:= \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(X - u_i)}{t^{w_\alpha(n)}} \quad (\forall n \geq 1)\,, \end{aligned}$$

formano una base regolare di $\mathbb{B}_x(V)$ su V.

Grazie alle proprietà delle basi regolari di $\mathbb{B}_x(V)$ su V, viene dimostrato il seguente Teorema, che implica la noetherianità di $\mathbb{B}_x(V)$.

Teorema 11. *Siano V un DVR con valutazione v, q la cardinalità del campo residuo di V ed $x \in V$ un elemento di valutazione α. Inoltre, siano $\{u_n\}$ una successione v-ordinata di ordine α e $\{f_n\}$ la base regolare di $\mathbb{B}_x(V)$ su V ottenuta da $\{u_n\}$. Allora $\mathbb{B}_x(V)$ è una V-algebra finita, generata dai primi $q^\alpha + 1$ polinomi della successione $\{f_n\}$:*

$$\mathbb{B}_x(V) = V[f_0, f_1, \ldots, f_{q^\alpha}]\,.$$

In particolare, $\mathbb{B}_x(V)$ è un dominio noetheriano.

A seguito dell'analisi sulle basi regolari di $\mathbb{B}_x(V)$ su V, viene data una descrizione completa dello spettro primo di $\mathbb{B}_x(V)$. In particolare, vengono determinati gli ideali primi di $\mathbb{B}_x(V)$ che si contraggono sull'ideale massimale M di V; viene, quindi, osservato che la dimensione di $\mathbb{B}_x(V)$ è pari a due ed, infine, vengono indagate le condizioni per le quali gli upper to (0) di $\mathbb{B}_x(V)$ sono massimali. Per quanto riguarda la descrizione degli ideali primi di $\mathbb{B}_x(V)$ sopra M, viene dimostrato che essi sono tutti e soli gli ideali $M_a[X]$ e $\mathfrak{M}_{(M,\varphi)\,,\,a}$, già studiati nel primo capitolo, e che gli ideali $\mathfrak{M}_{(M,\varphi)\,,\,a}$ sono massimali. Più precisamente, viene dato il seguente risultato.

Teorema 12. *Sia (V, M) un DVR di campo residuo finito e sia $x \in V$ un elemento non invertibile. Tutti e soli gli ideali primi di $\mathbb{B}_x(V)$ sopra M appartengono alle due seguenti famiglie:*

1. *per $a \in V$, gli ideali*

$$M_a[X] := \{f(X) \in \mathbb{B}_x(V) \,|\, f(xX + a) \in M[X]\}$$

   sono primi di altezza 1 in corrispondenza biunivoca con le classi di V modulo M^α;

2. *per $a \in V$, $\varphi \in V[X]$ tale che $\bar{\varphi} \in \frac{V}{M}[X]$ è irriducibile, gli ideali*

$$\mathfrak{M}_{(M,\varphi)\,,\,a} := \{f(X) \in \mathbb{B}_x(V) \,|\, f(xX + a) \in (M, \varphi)\}$$

   sono primi di altezza 2 e massimali, contenenti uno ed un solo primo $M_a[X]$, ed in corrispondenza biunivoca con gli ideali primi di $V[X]$ che contengono $M[X]$. □

Degli ideali primi $M_a[X]$ e $\mathfrak{M}_{(M,\varphi)\,,\,a}$ vengono anche descritti i generatori. Come si evince dai due risultati seguenti, tali generatori sono i primi polinomi di un'opportuna base regolare di $\mathbb{B}_x(V)$ su V.

Proposizione 13. *Sia (V, M) un DVR con valutazione v e sia q la cardinalità di $\frac{V}{M}$. Siano $t \in V$ un parametro uniformizzante ed $x \in V$ un elemento di valutazione α. Siano $\{u_n\}$ una successione v-ordinata di ordine α e $\{f_n\}$ la base regolare di $\mathbb{B}_x(V)$ su V ottenuta da $\{u_n\}$. Allora*

$$\mathfrak{M}_{M,a} = (t, f_1, f_q, \dots, f_{q^\alpha})\,.$$

Proposizione 14. *Sia (V, M) un DVR con valutazione v e sia q la cardinalità di $\frac{V}{M}$. Siano $x \in V$ un elemento di valutazione α, $t \in V$ un parametro uniformizzante ed $a \in V$ un elemento generico. Siano $\{u_n\}$ una successione v-oridnata di ordine α di termine iniziale $u_0 = a$ ed $\{f_n\}$ la base regolare di $\mathbb{B}_x(V)$ su V ottenuta da $\{u_n\}$. Allora*

$$M_a[X] = (t, f_1, f_q, \dots, f_{q^{\alpha-1}})\,.$$

Come è ben noto dalla teoria sui domini di polinomi, gli upper to (0) di $\mathbb{B}_x(V)$ sono tutti e soli gli ideali primi della forma

$$\mathfrak{P}_g := gK[X] \cap \mathbb{B}_x(V)\,,$$

dove K è il campo dei quozienti di V e g è un polinomio irriducibile in $K[X]$. Nella parte finale del secondo capitolo vengono descritte le condizioni che deve soddisfare il polinomio g, affinché l'ideale primo $\mathfrak{P}_g$ sia contenuto o meno in un ideale massimale del tipo $\mathfrak{M}_{(M,\varphi)\,,\,a}$. In particolare, vengono date le condizioni per le quali l'ideale primo $\mathfrak{P}_g$ è massimale. Come si evince dai seguenti risultai, tali condizioni sono strettamente legate alla valutazione del polinomio g.

Teorema 15. *Sia V un DVR con valutazione v e sia K il suo campo dei quozienti. Siano g un polinomio irriducibile di $K[X]$, $x \in V$ un elemento di valutazione α ed $a \in V$ un elemento generico. Si ha che:*

1. *$\mathfrak{P}_g$ è contenuto in un ideale massimale che contiene $M_a^{(\alpha)}[X]$ se e solo se $v(g(xX+a)-g(a)) \leq v(g(a))$;*

2. *$\mathfrak{P}_g$ è contenuto in $\mathfrak{M}_a^{(\alpha)}$ se e solo se $v(g(xX+a)) < v(g(a))$.*

Corollario 16. *Sia V un DVR con valutazione v e sia K il suo campo dei quozienti. Siano g un polinomio irriducibile di $K[X]$ e $x \in V$ un elemento di valutazione α. Allora $\mathfrak{P}_g$ è un ideale massimale di $\mathbb{B}_x(V)$ se e solo se $v(g(xX+a)-g(a)) > v(g(a))$ per ogni $a \in V$.* □

Lo studio sulla massimalità degli ideali primi $\mathfrak{P}_g$ conclude la descrizione dello spettro primo del dominio $\mathbb{B}_x(V)$.