



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

# Geometria della quartica di Klein

Relatore

Prof. Andrea Bruno

Candidato

Manuela Rosati

Anno Accademico 2009-2010

Ottobre 2010

Parole chiave: plane curve, Riemann surface, hyperbolic tessellations

MRcode: 14N25, 57M50

# *Sintesi*

## **Introduzione**

La quartica di Klein è una superficie di Riemann di genere 3 scoperta dal matematico tedesco Felix Klein nel 1879 ed è stata chiamata quartica di Klein, o curva di Klein, in suo onore.

Si tratta di un bellissimo oggetto matematico studiato da più di un secolo da molti punti di vista, dall'analisi complessa alla geometria iperbolica, dalla teoria dei gruppi alla geometria proiettiva.

Ancora oggi non si può che restare affascinati dalla sua bellezza data dalle sorprendenti simmetrie. Nel presente lavoro abbiamo posto l'accento su alcune di queste proprietà eccezionali.

L'Istituto di Ricerca di Scienze Matematiche, MSRI, nel 1998 ha commissionato una ricerca per mostrare il prestigio di questa curva ed ha installato una scultura in marmo bianco, una vera e propria opera d'arte realizzata da Helaman Ferguson.

In realtà la superficie descritta dalla quartica di Klein è impossibile da realizzare

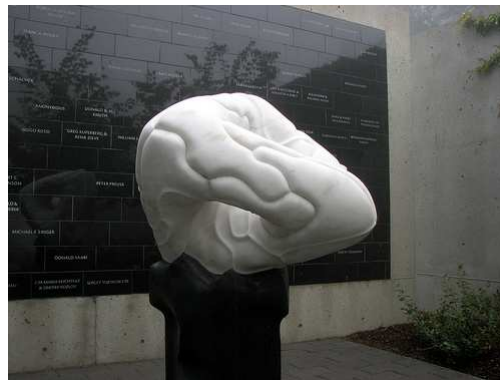


Figura 1: Scultura realizzata da Helaman Ferguson esposta dal MSRI.

nello spazio tridimensionale usuale, cosicchè la scultura può essere pensata come figura topologica.

La superficie infatti è divisa in 24 regioni ed ogni regione ha 7 lati che ricordano l'ettagono regolare.

Questa suddivisione della superficie esprime l'essenza della sua matematica, essendo un esempio di oggetto quasi perfetto perchè altamente simmetrico.

La quartica di Klein può essere considerata infatti un'estensione del concetto di poliedro regolare, come lo sono il cubo o il tetraedro.

Nel modello gli ettagoni sono tutti equivalenti tra loro ed ogni ettagono è ruotato di  $\frac{2\pi}{7}$ . Abbiamo dunque  $24 \times 7 = 168$  modi totali di ruotare la scultura.

Se consideriamo inoltre la riflessione di ogni ettagono rispetto alla sua altezza, che anch'essa lascia il modello invariato, si hanno il doppio delle simmetrie, ossia 336.

Nel dettaglio la tesi è così organizzata:

**Nel primo capitolo** sono state introdotte le nozioni base della teoria delle tassellazioni del piano euclideo, delle superfici regolari e del piano iperbolico.

Queste ultime si riveleranno di grande interesse perchè alla quartica è associata una particolare tassellazione iperbolica.

**Nel secondo capitolo** si dimostra che la quartica di Klein è una superficie di Riemann di genere 3 e attraverso il teorema di Riemann Hurwitz si dimostra anche che possiede il massimo degli automorfismi possibili, ben 168 simmetrie.

**Definizione 1.** *Una varietà complessa di dimensione 1 prende il nome di superficie di Riemann.*

*Date due varietà complesse  $X$  e  $Y$ , di dimensioni  $n$  e  $m$  rispettivamente, e  $f$  un'applicazione*

$$f : X \longrightarrow Y$$

*si dice analitica o olomorfa se, date due carte locali  $(U, \phi)$  in  $X$  e  $(V, \psi)$  in  $Y$ , tale che  $f(U) \subset V$ , l'applicazione*

$$\mathbb{C}^n \supseteq \phi(U) \xrightarrow{\psi \circ f \circ \phi^{-1}} \psi(V) \subseteq \mathbb{C}^m$$

*è analitica.*

**Teorema 1.** *Se  $f(z, \omega)$  è un polinomio irriducibile  $f(z, \omega)$ , allora il luogo degli zeri  $X$  è connesso. Quindi se  $f$  è non singolare e irriducibile,  $X$  è una superficie di Riemann.*

La quartica di Klein ha equazione

$$f = \lambda^3 \mu + \mu^3 \lambda + \nu^3 \lambda,$$

e descrive una curva algebrica piana irriducibile e non singolare definita nel piano complesso, pertanto è una superficie di Riemann.

**Definizione 2.** *L'ordine di  $f$  in  $a$  è il più piccolo esponente  $k$  tale che  $a_k \neq 0$ , e si denota con  $o_a(f)$ .*

**Definizione 3.** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica definita su un aperto  $a$  di  $\mathbb{C}$  e sia  $a \in A$ . L'indice di ramificazione di  $f$  in  $a$  è*

$$e_f(a) = o_a(f(z) - f(a)).$$

*Il punto  $a$  si dice di ramificazione per  $f$  se  $e_f(a) \geq 2$ . In tal caso diremo che  $f$  ramifica in  $a$ .*

**Teorema 2** (di Riemann Hurwitz). *Consideriamo un'applicazione meromorfa, detto anche rivestimento ramificato,  $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Sia  $n$  il grado di  $f$ . Vogliamo dimostrare che*

$$2n + 2g - 2 = \sum (e_p(f) - 1).$$

Per il teorema di Riemann Hurwitz si dimostra che la quartica è una superficie di genere 3. Definendo l'azione di un gruppo sulla superficie di Riemann e utilizzando il Teorema sugli automorfismi di Hurwitz, si può concludere che la curva possiede il massimo degli automorfismi possibili, ossia esattamente 168 automorfismi.

**Teorema 3** (sugli automorfismi di Hurwitz). *Sia  $g$  un gruppo con azione finita olomorfa su una superficie compatta  $X$  di Riemann di genere  $g \geq 2$ . Allora*

$$|G| \leq 84(g - 1).$$

**Il terzo capitolo** si può dire sia il cuore di questa tesi, in quanto sono descritte in dettaglio le eccezionali proprietà della quartica nell'ambito della geometria proiettiva.

Questa analisi porta a definire i punti particolari della curva, il loro significato ed il legame che sussiste tra essi.

**Teorema 4.** *Sia  $C(x,y,z) = 0$  una curva non singolare di grado  $n$  allora possiede  $3n(n-2)$  punti di flesso.*

Poichè la quartica è una curva di grado 4, essa possiede 24 punti di flesso e, utilizzando la *formula di Plücker* e i due lemmi, è possibile calcolare il numero delle sue bitangenti.

**Lemma 1.** *Sia  $C^*$  una curva duale avente un nodo, allora si tratta di una tangente di  $C$  che appartiene a due punti di  $C$ . Dunque un nodo di  $C^*$  corrisponde a una bitangente di  $C$ , cioè una retta tangente in due punti distinti di  $C$ . In particolare, perchè  $C^*$  presenti un nodo, è necessario che il grado di  $C$  sia almeno 4.*

**Lemma 2.** *Se la curva duale  $C^*$  presenta una cuspidi, allora si tratta di una tangente di  $C$  che appartiene a due punti coincidenti di  $C$ , l'unica tangente nella cuspidi a  $C^*$ . Dunque una cuspidi di  $C^*$  corrisponde a una tangente di flesso di  $C$ , cioè una retta tangente di  $C$  in un punto di flesso.*

Possiamo ora enunciare la *formula di Plücker*:

**Teorema 5.** *Sia  $C$  una curva piana di grado  $d$  e  $C^*$  la curva duale  $C^*$  di grado  $d(d-1)$ , siano  $k$  e  $\tau$  il numero dei nodi e delle cuspidi di  $C^*$  corrispondenti rispettivamente al numero di  $b$  bitangenti e ad  $f$  tangenti inflessionali di  $C$ , si ha*

$$d = d^*(d^* - 1) - 2b - 3f.$$

Pertanto si ottiene il seguente risultato:

**Corollario 1.** *Se  $C$  è una quartica piana essa ha 24 flessi e 28 bitangenti.*

Illustriamo ora il gruppo delle 168 simmetrie che determinano una classificazione dei suoi punti notevoli.

**Lemma 3.** *Una curva di ordine 4 è mandata in se stessa da un gruppo di 168 proiettività. In particolare, esiste un gruppo di 168 proiettività del piano, nessuna delle quali ha periodo più alto di 7.*

Inoltre possiamo dichiarare che:

**Proposizione 1.** *La quartica di Klein ha tre tipi di punti diversi e sono:*

- 24 punti di flesso che chiamiamo punti di tipo a;
- 56 punti di contatto delle bitangenti che chiamiamo punti di tipo b;
- 84 punti sestatici che chiamiamo punti di tipo c.

**Lemma 4.** *I 24 punti di flesso di  $C$  cadono in 8 triple corrispondenti ai 24 punti di tipo a. Ogni tripla dei punti di flesso forma i vertici di un triangolo i cui spigoli sono le tangenti inflessionali.*

**Lemma 5.** *Le 28 coppie dei punti b corrispondono alle 28 coppie dei punti di contatto delle bitangenti.*

**Lemma 6.** *Gli 84 punti sestatici sono le intersezioni di  $C$  con 21 linee rette. I quattro punti di ognuna di queste linee corrispondono alle quadruple dei punti c.*

In seguito vengono calcolati i sottogruppi dei 168 automorfismi, tenendo conto di questi punti notevoli. Ogni sottogruppo altro non è che un gruppo di simmetrie, rotazioni che permutano i vertici dei triangoli inflessionali nel caso dei punti a, riflessioni nel caso dei punti sestatici di tipo c, una rotazione ed una riflessione nel caso dei punti b.

Si possono dunque calcolare tre sottogruppi  $G_{21}$ ,  $G_6$  e  $G_{24}$  delle 168 proiettività, i cui elementi sono le trasformazioni lineari che, sostituite all'equazione della quartica con i rispettivi cambi di variabile, lasciano la sua equazione invariata.

In ultimo esaminiamo alcuni punti reali della curva.

**Il quarto capitolo** tratta sempre le affascinanti simmetrie della quartica, ma questa volta da un punto di vista algebrico.

Sono illustrati infatti alcuni concetti base della teoria dei gruppi, si ritrovano gruppi particolari a cui sono associate le tassellazioni mostrate nel primo capitolo.

In tale ambito, utilizzando solo il fatto che il gruppo degli automorfismi opera su una superficie topologica, con la sua caratteristica, ritroviamo il teorema di Hurwitz e le azioni di gruppi sulle superfici topologiche più semplici  $S^2$  e  $T^2$ , poi vengono quelle iperboliche.

Si analizzano dunque le soluzioni dei casi in cui il genere  $p = 0, 1, 3$ .

$$2(p-1) = N(n-2 - \sum_1^n \frac{1}{m_r}). \quad (1)$$

In termini delle loro operazioni generatrici, i 5 tipi di gruppi di genere 0 sono dati dalle relazioni:

- $S_1^n = E, \quad S_2^n = E, \quad S_1 S_2 = E,$
- $S_1^2 = E, \quad S_2^2 = E, \quad S_3^n = E, \quad S_1 S_2 S_3 = E,$
- $S_1^2 = E, \quad S_2^3 = E, \quad S_3^3 = E, \quad S_1 S_2 S_3 = E,$
- $S_1^2 = E, \quad S_2^3 = E, \quad S_3^4 = E, \quad S_1 S_2 S_3 = E,$
- $S_1^2 = E, \quad S_2^3 = E, \quad S_3^5 = E, \quad S_1 S_2 S_3 = E.$

Tralasciando la prima che non richiede discussioni speciali definiamo ora ogni gruppo nella forma seguente:

- $S_1^\alpha S_3^\beta, \quad (\alpha = 0, 1; \beta = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  descrive il gruppo diedrale, poichè contiene un sottogruppo ciclico di ordine  $n$  autoconiugato, il gruppo è isomorfo al gruppo simmetrico  $S_3$ ;

- $S_2^\alpha S_1^\beta S_2 S_1^\gamma$ ,  $(\alpha = 0, 1, 2; \beta, \gamma = 0, 1)$  descrive il gruppo del tetraedro, poichè le 12 operazioni formano un sottogruppo coniugato di ordine 4, il gruppo è isomorfo al sottogruppo alterno  $A_4$ ;
- $S_1^\alpha S_2^\beta S_3^{2\gamma} S_2 S_3^{2\delta}$ ,  $(\alpha, \gamma, \delta = 0, 1; \beta = 0, 1, 2)$  descrive il gruppo dell'ottaedro, poichè le sue operazioni generatrici formano il gruppo del tetraedro isomorfo ad  $A_4$ , il gruppo è isomorfo al gruppo simmetrico  $S_4$ ;
- $S_3^\alpha$ ,  $S_3^\alpha S_1 S_3^\beta$ ,  $S_3^\alpha S_1 S_3^2 S_1 S_3^\beta$ ,  $S_3^\alpha S_1 S_3^2 S_1 S_3^3 S_1$ ,  $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4)$ , descrive il gruppo dell'icosaedro e non ha sottogruppi, è isomorfo al sottogruppo alterno  $A_5$ .

Poniamo particolare attenzione a quest'ultimo gruppo, esso è un gruppo ciclico composto da 60 elementi, si definisce inoltre come *il più piccolo gruppo semplice*. Osserviamo anche che i 5 gruppi sono una rappresentazione grafica dei gruppi corrispondenti alle 5 tassellazioni possibili della sfera.

Per una superficie di genere 1 si ottengono i seguenti tre tipi di gruppi:

- $S_1^\alpha (S_1 S_2)^\beta (S_2 S_3)^\gamma$ ,  $(\alpha = 0, 1; \beta, \gamma = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty)$ ;
- $S_1^\alpha (S_1 S_2^2)^\beta (S_2 S_1 S_2)^\gamma$ ,  $(\alpha = 0, 1, 2; \beta, \gamma = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty)$ ;
- $S_2^\alpha (S_1 S_2^2)^\beta (S_2 S_1 S_2)^\gamma$ ,  $(\alpha = 0, 1, 2, 3; \beta, \gamma = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty)$ ;
- $S_3^\alpha (S_2^2 S_3^2)^\beta (S_3 S_2^2 S_3)^\gamma$   $(\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5; \beta, \gamma = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty)$ .

Esistono allora quattro classi distinte di gruppi di genere 1, che sono definiti in termini delle loro operazioni generatrici tramite i seguenti insiemi di relazioni

- $S_1^2 = E$ ,  $S_2^2 = E$ ,  $S_3^2 = E$ ,  $(S_1 S_2 S_3)^2 = E$ ,  $(S_1 S_2 S_3)^2 = E$ ,  
 $(S_1 S_2)^a (S_2 S_3)^b = E$ ,  $(S_1 S_2)^{a'} (S_2 S_3)^{b'} = E$ ,  $(ab' - a'b \neq 0)$ ;  
 $N = 2(ab' - a'b)$ .
- $S_1^3 = E$ ,  $S_2^3 = E$ ,  $(S_1 S_2)^3 = E$ ,  $(S_1 S_2)^a (S_2 S_1 S_2)^b = E$ ;  
 $N = 3(a^2 - ab + b^2)$ .



- $S_1^2 = E, \quad S_2^4 = E, \quad (S_1 S_2)^4 = E, \quad (S_1 S_2^2)^a (S_2 S_1 S_2)^b = E;$   
 $N = 4(a^2 + b^2).$
- $S_1^6 = E, \quad S_2^3 = E, \quad (S_1 S_2)^2 = E, \quad (S_1^2 S_2^2)^a (S_1 S_2^2 S_1)^b = E;$   
 $N = 6(a^2 + ab + b^2).$

E' interessante sottolineare che questi gruppi sono di ordine infinito e le loro operazioni rappresentano rotazioni o traslazioni che ricoprono il piano all'infinito. Questa rappresentazione è parallela alla tassellazione del toro e della bottiglia di Klein, di cui abbiamo parlato nel primo capitolo.

Esaminando il caso di superfici di genere 3, si verifica che la tassellazione della quartica di Klein è la rappresentazione grafica di  $PSL(2, 7)$ , il gruppo dei 168 automorfismi è rappresentato da una tassellazione su  $H^2$ . Inoltre tale gruppo è *il secondo gruppo semplice non abeliano*.

Utilizzando la formula di Hurwitz, l'equazione (1) diventa

$$2p - 2 = 168(3 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}),$$

poichè le soluzioni sono

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 7.$$

Le operazioni che generano il gruppo sono dunque

$$S_2^2 = E, \quad S_3^3 = E, \quad S_7^7 = E, \quad S_2 S_3 S_7 = E$$

dove

$$S_2 = (16)(34), \quad S_3 = (253)(476), \quad S_7 = (1673524).$$

La figura acquisisce la forma più simmetrica possibile e si ottiene dalle rotazioni di un triangolo che ruota di un angolo  $\frac{2\pi}{7}$ .

E' costruita infatti prendendo il centro del cerchio ortogonale per il punto angolare del triangolo in cui l'angolo è  $\frac{\pi}{7}$ , i due raggi del cerchio ortogonale, ossia i lati

del triangolo, sono inclinati di un angolo di  $\frac{2\pi}{7}$ . Il resto del poligono può essere riempito tramite l'inversione fino al bordo.

E' interessante sottolineare che il gruppo di 168 elementi è il secondo gruppo semplice.

Nella figura 1 è rappresentato tale gruppo, generato dalla rotazione intorno al vertice del triangolo di ampiezza  $\frac{\pi}{7}$ , otteniamo quindi una particolare tassellazione del piano iperbolico di cui parleremo in dettaglio nel capitolo successivo.

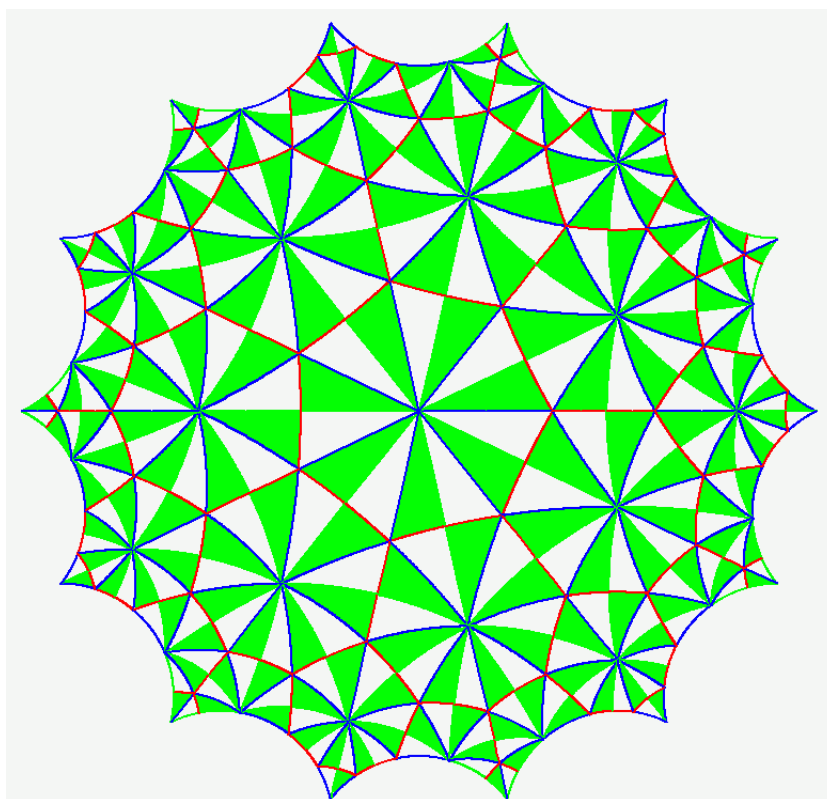


Figura 2: Rappresentazione del gruppo generato dalle operazioni  $S_2, S_3, S_4$  associato alla quartica di Klein.

**Il quinto capitolo** descrive nel dettaglio questa bellissima tassellazione iperbolica associata alla quartica.

Per cominciare si può considerare il poligono di 14 lati, esso è ottenuto ruotando il triangolo iperbolico di angoli  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$  intorno all'angolo  $\frac{\pi}{7}$ , tale rotazione è costi-

$$\begin{aligned}
1 &\longleftrightarrow 6 \\
3 &\longleftrightarrow 8 \\
5 &\longleftrightarrow 10 \\
7 &\longleftrightarrow 12 \\
9 &\longleftrightarrow 14 \\
2 &\longleftrightarrow 11 \\
4 &\longleftrightarrow 13
\end{aligned}$$

Tabella 1: Schema delle identificazioni dei 14 spigoli del poligono.

tuita di un angolo di ampiezza  $\frac{2\pi}{7}$ .

Si può procedere ora alle identificazioni a coppie dei 14 lati tramite la trasformazione lineare

$$\omega \longrightarrow \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$$

ed abbiamo lo schema delle identificazioni rappresentate dalla tabella 1.

Poichè la caratteristica di Eulero è invariante per una tassellazione, costruiamo due tassellazioni più fini e si evidenziano così i punti notevoli analizzati nel capitolo 3.

Il poligono di 14 lati può essere infatti diviso ulteriormente in 24 ettagoni regolari, ogni ettagono è diviso a sua volta in 14 triangoli, identificati a due a due secondo lo schema precedente. Si ottegono dunque 336 triangoli che corrispondono ai 168 automorfismi e ai 168 antiautomorfismi generati dal quoziente

$$PSL(2, 7) = \frac{PGL(2,7)}{\{\pm 1\}}.$$

Si calcola la caratteristica di Eulero della tassellazione avente 24 facce, 84 spigoli e 56 vertici

$$\chi(T) = 24 - 84 + 56 = -4,$$

come richiesto per una superficie di genere 3.

Si ottiene lo stesso risultato considerando la *tassellazione duale* in triangoli regolari,

scambiando vertici e facce, si può osservare infatti che nella tassellazione ettagonale in ogni vertice si incontrano 3 ettagoni; viceversa nella tassellazione triangolare, in ogni vertice si incontrano 7 triangoli. Poichè nel piano iperbolico i poligoni possono essere considerati regolari, le tassellazioni si dicono regolari.

Ricordiamo ora quanto è stato detto nel capitolo 3 riguardo i punti notevoli di tipo a, b e c e vediamo le interessanti analogie.

I 24 punti di flesso hanno ordine 7 e nella tassellazione rappresentano i centri dei 24 ettagoni, poichè ogni ettagono ha 7 vertici, in totale abbiamo 168 vertici; mentre le 28 coppie dei punti di contatto delle bitangenti, dunque in totale 56, sono i 56 triangoli e si ottengono anche qui i 168 vertici.