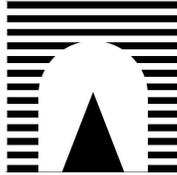


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali



Sintesi di tesi di Laurea in Matematica

Le curve frattali

Il Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato
Valentina Razzi

Anno Accademico 2005-2006

Luglio 2006

Classificazione: 28A80-2802

Parole chiave: Frattali, insiemi autosimili.

Sintesi

Fino ad oggi alla domanda cosa sia un frattale nessuno è stato in grado di fornire una risposta. Si può, tuttavia, affermare che i frattali erano noti fin dai tempi del matematico russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, nella seconda metà dell'Ottocento, ma che la teoria relativa ad essi è stata formalizzata solo a partire dal 1975 in seguito agli studi di Benoit Mandelbrot, matematico francese ritenuto, per questo, il padre dei frattali.

I frattali sono oggetti matematici il cui aspetto più sorprendente è senza dubbio quello visivo-grafico. Inizialmente, essi erano considerati solamente delle immagini tanto particolari quanto affascinanti, ma del tutto prive di fondamenti matematici. Per tale motivo, nell'immaginario collettivo, i frattali costituivano unicamente una forma d'arte, nata da strane formule matematiche prive di applicazioni pratiche, non adatte a ricoprire un ruolo fondamentale nell'ambito scientifico.

La data in cui si colloca lo sviluppo della teoria dei frattali è significativa per capire il passaggio dall'aspetto "artistico" a quello matematico, infatti, essa coincide con l'inizio della collaborazione tra Mandelbrot e la società IBM. In quella circostanza il matematico ebbe la possibilità di lavorare con strumenti tecnico-informatici molto avanzati che gli permisero di visualizzare curve ed oggetti frattali definiti in precedenza da altri matematici. Questi studiosi, quali Cantor, Koch o Lévy, tentarono a lungo di sviluppare una teoria esaustiva sugli insiemi da loro stessi definiti che presentavano caratteristiche particolari fino a quel momento mai viste, e, quando capirono che il loro lavoro non avrebbe portato ad alcun risultato, vista l'assenza di strumenti

tecnicisti adeguati, arrivarono a definire questi oggetti come patologici.

L'idea iniziale, un pò "naïf", dei frattali è stata superata nel momento in cui il matematico francese sviluppò un'intera teoria, per certi aspetti anche piuttosto complicata, volta a giustificare le caratteristiche principali degli oggetti frattali, nonché a garantirne l'esistenza.

I frattali sono stati emancipati dal loro ruolo di oggetti di puro godimento estetico¹ e si stanno rivelando uno strumento adeguato per lo studio della realtà.

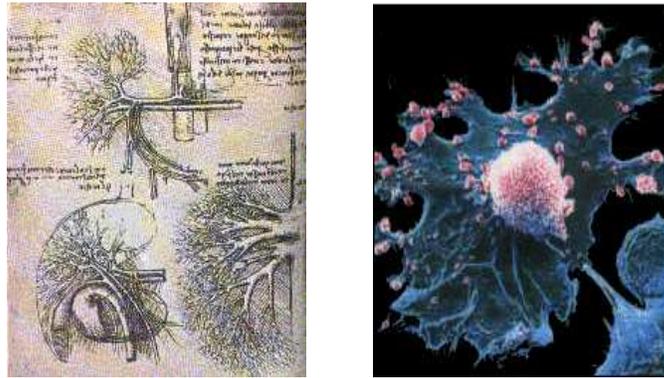


Figura 1: I frattali in medicina: l'apparato respiratorio e le cellule.

In effetti, oggi, gli ambiti in cui vengono applicati i frattali sono i più disparati: dall'analisi delle equazioni differenziali nello studio dei sistemi dinamici, allo studio della teoria del caos; dalla medicina (per rappresentare alcuni apparati come quello respiratorio o circolatorio o anche per studiare la riproduzione delle cellule affette da tumore), fino ad arrivare ad applicazioni nel campo dell'aerodinamica dei corpi. Inoltre i frattali hanno consentito di creare modelli per molti oggetti presenti in natura, come le nuvole, gli alberi, le stelle e le conchiglie.

Si ritrovano figure e forme frattali anche nell'ambito dell'arte. Numerosi artisti si sono ispirati alle particolari strutture che si ottengono mediante il procedimento iterativo con cui si costruiscono gli oggetti frattali. Tra questi si

¹«La matematica, giustamente considerata, non contiene soltanto la verità, ma la bellezza suprema.» B.Russel in "Lo studio della matematica".

ricorda Alice Kelley che, seguendo veri procedimenti matematici con l'utilizzo del computer, ha sviluppato un'ampia branca dell'arte sperimentale.



Figura 2: I frattali in arte: Alice Kelley.

Il termine “frattale” venne coniato nel 1975 da Mandelbrot. L’etimologia del vocabolo sottolinea le due caratteristiche che, in qualche modo, definiscono questi oggetti: la parola “frattale” deriva dal latino “*fractus*” e dal verbo “*frangere*” che significano rispettivamente frammentato e rompere, quindi, creare dei frammenti. Tale termine traduce l’idea intuitiva della percezione visiva di questi oggetti estremamente frastagliati, composti da parti aventi la fondamentale proprietà dell’autosomiglianza (i sottoinsiemi che costituiscono l’oggetto frattale sono simili all’insieme originario o hanno caratteristiche simili al tutto). Allo stesso tempo, “frattale” indica un oggetto che possiede una dimensione frazionaria (non intera). Quest’ultima proprietà non è comune a tutti gli insiemi frattali. Esistono, infatti, oggetti soddisfacenti la caratteristica dell’autosomiglianza, ma che hanno una dimensione² intera maggiore della dimensione topologica. A seguito dell’analisi di questi “casi limite”, Mandelbrot, insieme ai suoi colleghi, affrontò il problema di fornire una definizione univoca per gli oggetti frattali, capace di racchiudere tutti gli insiemi che verificavano le proprietà caratterizzanti i frattali. Ne furono proposte numerose, nessuna di queste, però, fu accolta con voto unanime, tanto che ancora oggi non esiste una definizione comunemente accettata di oggetto frattale. Tuttora ci si riferisce a questo oggetto descrivendone i suoi

²Riferendosi ai frattali per dimensione si intende la dimensione di Hausdorff o la dimensione frattale.

aspetti qualitativi, cioè il termine “frattale” rappresenta un’espressione usata per indicare tutti gli insiemi rispondenti alla proprietà di autosomiglianza, che abbiano dimensione frazionaria o intera ma maggiore della dimensione topologica.

L’approccio di Mandelbrot alla teoria dei frattali ha origine in un quesito che egli stesso si pose: “Quanto è lunga la costa della Bretagna?” A seguito di questa domanda il matematico iniziò a riflettere sul senso della misurazione di un oggetto naturale, come una costa, e si rese conto che ad un interrogativo tanto banale non corrispondeva una risposta così facile e soprattutto esatta. Infatti, per ottenere una misurazione precisa è necessario eseguirla tramite una scala opportuna, in particolare, tanto minore è il fattore di riduzione con cui si opera la misurazione tanto questa sarà più precisa.

Pertanto la domanda da porsi è: “Qual’è la scala opportuna per ottenere la lunghezza della costa?” A questo quesito non è possibile dare una risposta perché non esiste **la misura** della costa, ma, in base alla scala utilizzata, una misura sarà più precisa. L’unica scelta da compiere, se si vuole calcolare la lunghezza la costa della Bretagna, è fissare un margine di errore per la misurazione ed in base a questo adottare una scala con la quale eseguirla.

Tutte le riflessioni inerenti alla domanda che Mandelbrot si pose costituirono il corpo centrale dell’articolo intitolato proprio “How long is the coast of Britain?”, pubblicato dallo studioso francese nel 1967 sulla rivista «Science». Questo articolo costituisce, in qualche modo, il “manifesto” della teoria frattale, alla quale, in tempi diversi, avevano contribuito illustri matematici. Tra questi, in un primo momento inconsapevolmente, Koch e Cantor con l’apporto della curva di Koch e l’insieme ternario di Cantor e, dalla seconda metà del Novecento, lo stesso Mandelbrot insieme al suo insegnante Julia³ con ulteriori esempi.

³Gaston Maurice Julia (1893-1978) fu un insegnante di Mandelbrot all’Ecole Polytechnique di Parigi; la teoria sviluppata dall’allievo influenzò gli studi che Julia stava portando avanti indipendentemente. I frattali legati al nome di quest’ultimo sono ottenuti iterando funzioni di una variabile complessa del tipo $f(z) = z^2 + c$, dove $z, c \in \mathbb{C}$.

Lo scritto che viene analizzato in dettaglio comincia con l'affrontare alcune nozioni preliminari che consentono di studiare il soggetto principale, ovvero le curve frattali. Il suo obiettivo è di presentare un'intera famiglia di curve, di fornirne esempi ed elementi che permettano di comprendere appieno l'analisi qualitativa sviluppata nel particolare. Inoltre l'intera appendice, nella quale sono stati inseriti i programmi, sviluppati in linguaggio Java, dà la possibilità a chiunque di generare una curva frattale e di comprendere il ruolo delle similitudini, utilizzate nella rappresentazione grafica, che determinano la curva stessa.

Il lavoro, dunque, si articola in cinque capitoli e si conclude con un'appendice di programmazione.

Nel primo capitolo si introduce la definizione assiomatica di dimensione proposta da Menger per sottospazi di \mathbb{R}^n .

Definizione 1. (Cf. Definizione 1.1.1)

La dimensione di un arbitrario sottospazio X di \mathbb{R}^n è una funzione a valori interi, denotata $\dim X$, che soddisfa i seguenti assiomi:

1. per un singleton $\{p\}$, $\dim(\{p\}) = 0$, per intervalli unitari I^1 , $\dim(I^1) = 1$ ed in generale per ipercubi m -dimensionali I^m , $\dim(I^m) = m$;

2. (Monotonicità) $X' \subset X$ implica

$$\dim X' \leq \dim X;$$

3. (Stabilità numerabile) sia X unione numerabile di sottoinsiemi chiusi X_i di \mathbb{R}^n , allora

$$\dim \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) \leq \max_{i \geq 1} \dim X_i;$$

4. (Invarianza topologica) per un'arbitraria applicazione φ scelta nella famiglia degli omeomorfismi da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n si ha

$$\dim(\varphi(X)) = \dim X.$$

In seguito viene costruita per induzione una funzione “dim X ”.

Definizione 2. (Cf. Definizione 1.1.12)

Si definisce per induzione la **dimensione** di X :

- $X = \emptyset \iff \dim X = -1$.
- Uno spazio X ha $\dim X \leq n$ ($n \geq 0$) in un punto p se p possiede un intorno arbitrariamente piccolo U tale che $\dim \partial U \leq n - 1$.
- $\dim X \leq n$ se $\dim X \leq n$ in ogni suo punto.
- X ha dimensione n in un punto p se è vero che $\dim X \leq n$ nel punto p e risulta falso che $\dim X \leq n - 1$ in p .
- X ha dimensione n se è vero che $\dim X \leq n$ ed è falso che $\dim X \leq n - 1$.
- $\dim X = \infty$ se $\dim X \leq n$ è falsa $\forall n$.

Per tale funzione si verifica la validità dei quattro assiomi. Questa prova permetterà di affermare, a conclusione del capitolo, che la funzione costruita è una dimensione coincidente con la dimensione topologica.

Nel secondo capitolo sono riprese alcune nozioni basilari dalla teoria della misura necessarie per affrontare, nel corso dello stesso, l'analisi della dimensione di Hausdorff.

Si definisce, dapprima, la misura s -dimensionale di Hausdorff:

Definizione 3. (Cf. Definizione 2.1.6)

Sia $\mathcal{H}_\delta^s = \inf_{U_i} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ con s numero reale non negativo e $\{U_i\}$ un ricoprimento di X di raggio δ ; $\mathcal{H}_\delta^s(X) \in [0, \infty]$. Si definisce **misura s-dimensionale di Hausdorff** $\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(X)$.

Si analizzano, inoltre, le sue proprietà più significative, fino a classificare tale misura come una misura di Borel regolare.

Il seguente lemma, che mette in relazione due misure di Hausdorff con parametri diversi, evidenzia il legame tra la misura e la dimensione di Hausdorff:

Lemma 1. (Cf. Lemma 2.2.5)

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s < t < \infty$

(i) Se $\mathcal{H}^s(X) < \infty$, allora $\mathcal{H}^t(X) = 0$.

(ii) Se $\mathcal{H}^t(X) > 0$, allora $\mathcal{H}^s(X) = \infty$.

Da questo segue che se si grafica la funzione \mathcal{H}^s , come funzione di s , essa presenta un salto, cioè una discontinuità di primo tipo; proprio questa osservazione conduce a definire la dimensione di Hausdorff.

Definizione 4. (Cf. Definizione 2.2.10)

Qualora esista, il valore del punto di discontinuità della funzione \mathcal{H}^s , come funzione di s , rappresenta esattamente la dimensione di Hausdorff di X , viene indicata con $\dim_H(X)$ e si può facilmente osservare che soddisfa la relazione:

$$\dim_H(X) = \sup_s \{\mathcal{H}^s(X) = \infty\} = \inf_s \{\mathcal{H}^s(X) = 0\}.$$

Nel seguito vengono definite altre dimensioni che, nell'ultima parte del capitolo, sono messe in relazione con le dimensioni di Hausdorff e topologica.

Definizione 5. (Cf. Definizione 2.3.1)

Data $\mathcal{D} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una collezione di sfere con centro in X e di diametro minore o uguale di δ si definisce $\mathcal{P}_\delta^s(X) = \sup_{B_i} \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s$, con s numero reale non negativo. Si definisce in seguito **misura s-dimensionale dei box** di X la quantità $\mathcal{P}^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{P}_\delta^s(X)$; la **dimensione dei box** di X risulta essere il punto di discontinuità di prima specie, qualora esista, della funzione \mathcal{P}^s , come funzione del parametro s ; si indica con $\dim_B(X)$ e soddisfa la relazione:

$$\dim_B(X) = \inf_s \{\mathcal{P}^s(X) = 0\} = \sup_s \{\mathcal{P}^s = \infty\}.$$

Definizione 6. (Cf. Definizione 2.3.2)

Sia A un sottoinsieme compatto dello spazio metrico X , per ogni $\delta > 0$ si denoti con $\mathcal{N}_\delta(A)$ il numero minimo di sfere chiuse di raggio δ necessarie a ricoprire A . Se

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}_\delta(A))}{\ln(1/\delta)}$$

esiste, questo valore coincide con la **dimensione frattale** di A e viene indicata con $\dim_F(A)$.

Intuitivamente la dimensione frattale, caratteristica di ogni oggetto frattale, indica quanto esso “riempie lo spazio in cui vive”. È un parametro indirizzato a quantificare la sensazione visiva di un osservatore che si trova davanti alla rappresentazione grafica di un frattale.

La disuguaglianza tra le dimensioni date è la seguente:

$$\dim_T(A) \leq \dim_H(A) \leq \dim_B(A) \leq \dim_F(A).$$

Per poter arrivare a questa conclusione sono state confrontate mutualmente le dimensioni, definite in precedenza.

Con il terzo capitolo si entra nel vivo del lavoro; al termine di questo infatti, si darà la definizione delle curve frattali che sono oggetto di studio per tutto il resto del trattato.

Questo capitolo è diviso in tre sezioni: si apre con alcuni cenni sulla teoria relativa all'approssimazione poligonale di una qualsiasi curva Γ . Queste nozioni vengono introdotte per calcolare facilmente la lunghezza delle curve frattali che sono bene approssimate da un'opportuna curva poligonale.

Nella seconda sezione del capitolo si analizza la proprietà di rettificabilità di una curva:

Definizione 7. (Cf. Definizione 3.2.1)

Una curva è detta **rettificabile** se ogni suo punto, o almeno quasi tutti, possiede una tangente.

Essa può avere due interpretazioni:

- in senso globale è equivalente ad affermare che la curva possiede la tangente ed ha lunghezza finita;
- in senso locale è equivalente a quattro proprietà che risultano geometricamente equivalenti ad affermare che la curva è derivabile quasi ovunque.

Nell'ultima sezione del capitolo si dà la definizione di una curva frattale e se ne descrivono le caratteristiche fondamentali.

Definizione 8. (Cf. Definizione 3.3.1)

Una **curva frattale** è una curva caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- (i) è non rettificabile;
- (ii) è omogenea.

In analogia a quanto definito precedentemente si dice che una curva è non rettificabile in senso globale se essa ha lunghezza infinita; ed è non rettificabile localmente se essa non soddisfa le proprietà di rettificabilità, cioè non è derivabile in nessun punto.

Nel corso di questa sezione vengono, inoltre, forniti due metodi per verificare concretamente se una curva è di lunghezza infinita.

La seconda proprietà delle curve frattali, l'omogeneità, risulta in pieno accordo con il significato letterale del termine "omogeneo" che si interpreta come "avente la stessa struttura in ogni punto", quindi ogni parte di una curva frattale è simile all'intera struttura.

All'interno del capitolo vengono illustrati alcuni metodi che consentono la verifica di questa proprietà. Tra i principali si ricordano un metodo statistico ed uno matematico. Il primo consiste nel definire dei parametri geometrici e affermare che due strutture sono "simili" se su di esse i parametri assumono gli stessi valori (o valori dello stesso ordine). Il secondo, preferito dai matematici, si basa sul traslare una "struttura simile" per mezzo di una semplice applicazione di una trasformazione del piano. Dalla scelta delle trasformazioni si possono ottenere curve auto-simili o curve auto-affini. L'applicazione di tale metodo è più restrittiva del primo, ma permette di costruire un buon modello per le curve frattali ed è uno strumento utile per descriverle.

Nel quarto capitolo vengono affrontate le due proprietà caratterizzanti una curva frattale, o, più in generale, un qualsiasi oggetto frattale. Si

distinguono due sezioni una incentrata sull'autosomiglianza ed una sulla dimensione frattale.

La prima si apre con alcune definizioni preliminari sulle similitudini, sui movimenti rigidi, sulle dilatazioni e contrazioni. Inoltre si enuncia una proposizione di struttura delle similitudini che permette di limitare l'attenzione alle principali trasformazioni, quali le traslazioni, le omotetie e le rotazioni.

Proposizione 1. (Cf. Proposizione 4.1.2)

$S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una similitudine se e solo se S può essere rappresentata come $S = \mu_\rho \circ \tau_b \circ O$ per qualche μ_ρ omotetia, τ_b traslazione e O trasformazione ortonormale che rappresenta una rotazione.

Nella seconda parte della sezione si introducono le prime nozioni nuove.

Definizione 9 (insieme invariante). (Cf. Definizione 4.1.3)

Sia X uno spazio metrico completo, $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ un insieme di contrazioni, $A \subset X$, si ponga $\mathcal{S}(A) = \bigcup_{i=1}^N S_i(A)$. A si dice **invariante rispetto ad \mathcal{S}** se $A = \mathcal{S}(A)$.

Successivamente si enuncia il teorema di esistenza di tale insieme e, in un altro teorema, le principali proprietà.

Teorema 2. (Cf. Teorema 4.1.4)

Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ un insieme di contrazioni su uno spazio metrico completo (X, d) con $X \subset \mathbb{R}^n$, allora esiste un unico insieme compatto non vuoto, K , invariante rispetto a \mathcal{S} cioè:

$$K = \bigcup_{i=1}^N S_i(K).$$

Inoltre se si definisce S una trasformazione sulla classe \mathcal{C} degli insiemi compatti non vuoti, tale che $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$, poiché $\mathcal{S}(E) = \bigcup_{i=1}^N S_i(E)$ risulta

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E),$$

per ogni insieme E tale che $S_i(E) \subset E$ per ogni i .

Teorema 3. (Cf. Teorema 4.1.5)

Dato un insieme $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ di similitudini sia K l'unico insieme invariante rispetto a \mathcal{S} , cioè:

$$K = \bigcup_{i=1}^N K_i = \bigcup_{i=1}^N S_i(K),$$

allora valgono le seguenti:

1. $K_{i_1 \dots i_p} = S_{i_1 \dots i_p}(K) = \bigcup_{i_{p+1}=1}^N K_{i_1 \dots i_p i_{p+1}}$;
2. $K \supset K_{i_1} \supset \dots \supset K_{i_1 \dots i_p} \supset \dots$ e $\bigcap_{p=1}^{\infty} K_{i_1 \dots i_p} = k_{i_1 \dots i_p}$ cioè K è l'unione dei singleton di tale forma;
3. $k_{i_1 \dots i_p i_1 \dots i_p \dots} = s_{i_1 \dots i_p}$, punto fisso di $S_{i_1 \dots i_p}$, in particolare questo punto $\in K$, e $k_{i_1 \dots i_p \dots} = \lim_{p \rightarrow \infty} s_{i_1 \dots i_p}$, e tale limite esiste;
4. K è la chiusura dell'insieme formato dai punti fissi di $S_{i_1 \dots i_p}$;
5. $S_{j_1 \dots j_q}(K_{i_1 \dots i_p}) = K_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p}$ e $S_{j_1 \dots j_q}(k_{i_1 \dots i_p \dots}) = k_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p \dots}$;
6. Se A è un insieme limitato non vuoto allora $d(A_{i_1 \dots i_p}, k_{i_1 \dots i_p \dots}) \rightarrow_{p \rightarrow \infty} 0$; in particolare $S^p(A) \rightarrow K$ nella metrica di Hausdorff.

Questa prima sezione si conclude con la definizione di insieme autosimile rispetto ad un insieme di contrazioni, strettamente legata al concetto di insieme invariante.

Definizione 10. (Cf. Definizione 4.1.8)

Fissato un insieme di contrazioni \mathcal{S} , un insieme K si dice **autosimile** se vengono soddisfatte le seguenti:

- (i) K è un insieme invariante rispetto a \mathcal{S} ;
- (ii) $\mathcal{H}^k(K) > 0$ e $\mathcal{H}^k(K_i \cap K_j) = 0$ per ogni $i \neq j$ dove $k = \dim_H(K)$.

La seconda sezione del quarto capitolo si apre con una nuova definizione di dimensione frattale, in una formulazione che lega la dimensione frattale di un oggetto e l'insieme delle similitudini rispetto al quale l'oggetto preso in esame risulta l'insieme invariante.

Definizione 11. (Cf. Definizione 4.2.1)

Esiste un unico D , per il teorema della permanenza del segno, tale che $\sum_{i=1}^N \rho_i^D = 1$, dove $\rho_i = Lip(S_i)$. Tale D è detto **dimensione frattale rispetto a \mathcal{S}** .

L'analisi della dimensione frattale prosegue con un teorema che mostra l'equivalenza tra la definizione di dimensione frattale data nel secondo capitolo e la nuova formulazione.

Teorema 4. (Cf. Teorema 4.2.2)

Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ un insieme di similitudini (contrazioni), definite su \mathbb{R}^n , di costanti Lipschitziane ρ_i . Sia K l'insieme autosimile rispetto a \mathcal{S} , cioè $K = \sum_{i=1}^N S_i(K) = \sum_{i=1}^N K_i$ e $\mathcal{H}^k(K_i \cap K_j) = 0 \quad \forall \quad i \neq j$ dove $k = \dim_H(K)$, allora la dimensione frattale di K è l'unica soluzione D dell'equazione in t definita da $\sum_{i=1}^N \rho_i^t = 1$.

In seguito viene proposto un teorema che mostra la relazione, già analizzata nel capitolo II, tra la dimensione di Hausdorff e quella frattale, nel caso specifico dell'insieme invariante rispetto ad una collezione di similitudini fissata.

Teorema 5. (Cf. Teorema 4.2.9)

Sia m un numero intero positivo, $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ un insieme di similitudini definite su \mathbb{R}^m , si indichi con K l'insieme invariante rispetto a \mathcal{S} , si supponga che $\dim_H(K) = k$ e sia D la dimensione frattale di K . Allora $\mathcal{H}^D(K) < \infty$ e quindi $k \leq D$

Il capitolo si conclude con altri due teoremi: il primo costituisce una caratterizzazione per l'insieme autosimile, il secondo ne garantisce l'esistenza.

Teorema 6. (Cf. Teorema 4.2.10)

Sia m un numero intero positivo, $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ un insieme di similitudini definite su \mathbb{R}^m , di coefficienti $\rho_i \quad \forall i = \{1, 2, \dots, N\}$, se $0 < \mathcal{H}^k(K) < \infty$, allora K è l'insieme autosimile rispetto a \mathcal{S} se e solo se $k = D$.

Teorema 7. (Cf. teorema 4.2.18)

Si supponga che \mathcal{S} soddisfi la condizione degli insiemi aperti. Allora:

(i) esistono k_1 e k_2 tali che

$$0 < k_1 \leq \theta_*^D(\mu, k) \leq \theta^{*D}(\mu, k) \leq k_2 < \infty \quad \forall k \in K$$

(ii) $0 < \mathcal{H}^D(K) < \infty$ e quindi K risulta essere autosimile; in particolare $\dim_H(K) = D$.

Il quarto capitolo assume maggiore importanza in relazione alla scelta delle curve frattali analizzate. In tutto il lavoro vengono descritte curve ottenute con il metodo IFS -Iterated Function System- cioè tramite l'iterazione di un determinato sistema di funzioni che risultano similitudini, più precisamente contrazioni, a variabili reali.

In effetti, tutte le curve incontrate e rappresentate mediante gli algoritmi proposti, sono ottenute facendo agire, su un oggetto iniziale (ad esempio un triangolo, un segmento o un quadrato), tutte le similitudini dell'insieme \mathcal{S} infinite volte. Questo procedimento, essendo infinito, conduce ad un'immagine limite, la curva frattale, che coincide con l'insieme autosimile fissato da \mathcal{S} . In accordo con quanto sottolineato, si può notare che la rappresentazione, ricavata dall'algoritmo approssimante una curva frattale, dopo un numero arbitrariamente grande di passi, non presenterà più influenti ed evidenti variazioni, proprio perché ci si avvicina sempre più alla curva limite.

È evidente, in questa prospettiva, la relazione tra la parte più analitica del IV capitolo, che presenta l'insieme invariante e autosimile, e la parte più descrittiva del capitolo conclusivo, che contiene modelli di curve frattali.

L'ultimo capitolo possiede un ruolo essenzialmente esplicativo. In esso sono presenti esempi di polvere frattale e di curve frattali, che si distinguono in base alla seguente:

1. la polvere frattale = insieme totalmente sconnesso di infiniti punti tale che $0 < \dim_F(A) < 1$;

2. le curve frattali = insieme connesso di punti che definisce una vera e propria curva tale che $1 < \dim_F(A) < 2$.

I primi insiemi analizzati sono l'insieme di Cantor, esempio di polvere frattale, la curva di Peano, la curva di Minkowski, la curva di Lévy ed infine la famosa curva di Koch e la sua principale variazione, l'isola di Koch.

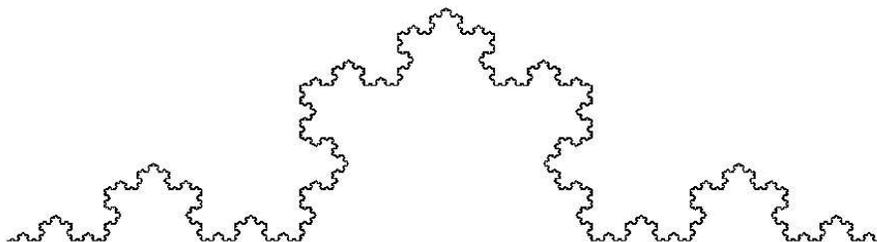


Figura 3: La curva di Koch.

Per tutti questi insiemi frattali viene descritto il procedimento geometrico costruttivo, viene calcolata la dimensione frattale e, qualora l'insieme sia una curva, la sua lunghezza. Inoltre viene dimostrata la proprietà dell'autosomiglianza anche se, nella maggior parte di queste curve, essa deriva semplicemente dal processo geometrico costruttivo.

L'analisi svolta su queste curve ne evidenzia un fattore comune: la loro lunghezza è infinita, nonostante l'intera curva venga costruita a partire da un segmento di lunghezza L e, pertanto, è interamente contenuta in un quadrato limitato di lato L . Allo stesso tempo tale proprietà è facilmente giustificabile se si pensa che in ogni passaggio la lunghezza della curva aumenta di un determinato fattore, quindi cresce indefinitamente durante gli infiniti passi della costruzione.

In particolare, in questa prima sezione, per alcune curve si determina esplicitamente l'insieme delle similitudini \mathcal{S} rispetto al quale esse costituiscono l'insieme invariante. Per l'insieme di Cantor, inoltre si dimostra anche un lemma che ne stabilisce la cardinalità:

Lemma 2. (*Cf. Lemma 5.1.2*)

La cardinalità dell'insieme di Cantor coincide con la cardinalità dell'intervallo $[0,1]$.

Nella seconda parte del capitolo, si introduce la branca della geometria frattale detta biomorfa il cui obiettivo è di creare modelli per gran parte degli oggetti presenti in natura. Ecco, dunque, che si affrontano altri esempi quali le spire, gli alberi, le stelle o la felce di Bosman. Per tutte queste curve è descritto il procedimento geometrico che le genera, nel caso delle spire si analizza il calcolo della lunghezza, mentre per la curva frattale della felce di Bosman si descrive esplicitamente la collezione di similitudini che costituisce l'insieme \mathcal{S} .

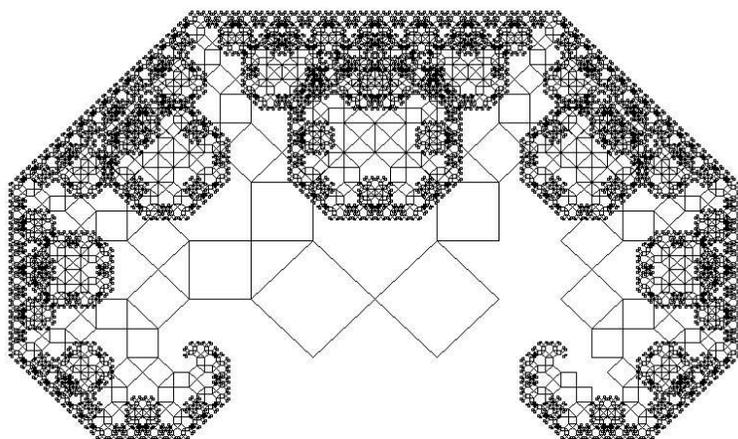


Figura 4: L'albero di Pitagora.

Per alcune di queste curve, nell'appendice conclusiva, si riporta la pseudo-codifica, chiarendo così il processo geometrico generatore, e il programma stesso che ho implementato in linguaggio Java. Tutte le immagini delle curve inserite nel lavoro sono state ottenute implementando tali programmi.

Bibliografia

- [1] Michael Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [2] Andrea Bertacca, Marco e Guidi. *Introduzione a Java*. McGraw-Hill Libri Italia srl, Milano, seconda edition, 1994.
- [3] Gerald A. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [4] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [5] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*, volume 85 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [6] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, second edition, 2003. Mathematical foundations and applications.
- [7] Witold Hurewicz and Henry Wallman. *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.
- [8] John E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.

- [9] Hans Lauwerier. *Fractals*. Princeton Science Library. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1991. Endlessly repeated geometrical figures, Translated from the Dutch by Sophia Gill-Hoffstädt.
- [10] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1982. Schriftenreihe für den Referenten. [Series for the Referee].
- [11] Benoit B. Mandelbrot. *Fractals and chaos*. Selected Works of Benoit B. Mandelbrot. Springer-Verlag, New York, 2004. The Mandelbrot set and beyond, Selecta Volume C, With a foreword by P. W. Jones and texts co-authored by C. J. G. Evertsz and M. C. Gutzwiller.
- [12] Miguel Ángel Martín and Pertti Mattila. k -dimensional regularity classifications for s -fractals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 305(1):293–315, 1988.
- [13] Miguel Ángel Martín and Pertti Mattila. Hausdorff measures, Hölder continuous maps and self-similar fractals. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 114(1):37–42, 1993.
- [14] Miguel Angel Martín and Pertti Mattila. On the parametrization of self-similar and other fractal sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(9):2641–2648, 2000.
- [15] Pertti Mattila. On the structure of self-similar fractals. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 7(2):189–195, 1982.
- [16] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.
- [17] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe. *Fractals for the classroom. Part 1*. Springer-Verlag, New York, 1992. Introduction to fractals and chaos, With a foreword by Benoit B. Mandelbrot.

- [18] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe. *Chaos and fractals*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004. New frontiers of science, With a foreword by Mitchell J. Feigenbaum.
- [19] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, Torino, 1994. Programma di matematica fisica elettronica.
- [20] Mitsuhiro Shishikura. Topological, geometric and complex analytic properties of Julia sets. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 886–895, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [21] Claude Tricot. *Curves and fractal dimension*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a foreword by Michel Mendès France, Translated from the 1993 French original.
- [22] Masaya Yamaguti, Masayoshi Hata, and Jun Kigami. *Mathematics of fractals*, volume 167 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Translated from the 1993 Japanese original by Kiki Hudson.