LE SUPERFICI RAZIONALI

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica
di Francesca Peroni
Relatore: Prof. Edoardo Sernesi

Oggetto di questa tesi sono le superfici razionali esaminate da un punto di vista classico; vengono in particolare analizzati alcuni dei risultati principali sulla classificazione di tali superfici, tra cui il teorema di Noether-Enriques ed il teorema di del Pezzo.
Le superfici razionali furono un interessante oggetto di studio per i matematici che vissero a cavallo tra il XIX ed il XX secolo tra cui ricordiamo gli italiani Segre, Severi, del Pezzo e Castelnuovo o Clebsh, Steiner e gli stessi Enriques e Noether.
La letteratura risalente a quel periodo è legata ad una visione molto intuitiva della geometria algebrica, disciplina che con Max Noether muoveva i primi passi verso la "concezione moderna" del termine; fu proprio il matematico tedesco, padre della più famosa Emmy Noether, che per primo iniziò lo studio sistematico della geometria sopra un ente algebrico, focalizzando la sua attenzione sulle proprietà di una curva o di una superficie che rimangono invariate sotto trasformazioni razionali.
Obiettivo principale di questo lavoro è stato quello di fornire una trattazione per quanto più possibile completa ed elementare delle proprietà fondamentali delle superfici esaminate, cercando di riorganizzare e soprattutto completare, formalizzando "l'intuizione", il materiale attinto dalle fonti classiche.

In tutto il lavoro si opera su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica nulla.
Per le nozioni fondamentali della geometria algebrica assunte come note si fa riferimento al corso di geometria superiore tenuto dai professori E. Sernesi e A. Lopez nell'a.a. 95/96, ed al testo [?].

La tesi è così strutturata:

Nel primo capitolo vengono introdotte le definizioni di divisore di Weil e di divisore di Cartier su una varietà proiettiva; si passa quindi, esaminando la relazione d'equivalenza tra divisori, all'analisi della corrispondenza biunivoca tra sistemi lineari di divisori sulla varietà X ed applicazioni razionali di X nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^N$, per N opportuno. In questo ambito vengono introdotti gli strumenti principali utilizzati nello studio delle superfici, cioè le proiezioni ed i risultati riguardo il grado e la struttura della varietà ottenuta come immagine della proiezione.

Il secondo capitolo è costituito di due parti. Nella prima vengono date alcune definizioni, tra cui

Definizione 1 *Una superficie proiettiva $S \subseteq \mathbb{P}^n$ si dice* rigata *se contiene infinite rette.*

Definizione 2 *Una superficie proiettiva S si dice* birazionalmente rigata di genere g *se S è birazionalmente equivalente al prodotto $\mathbb{P}^1 \times \Delta$, dove Δ è una curva proiettiva nonsingolare di genere g.*

Vengono inoltre esposti alcuni risultati di geometria algebrica e di algebra commutativa, come il *lemma di Tsen*, necessari per la dimostrazione del *teorema di Noether-Enriques*, a cui è riservata la seconda parte e che spesso indicheremo come teorema di N-E.
Questo teorema fornisce un criterio per la classificazione di superfici non singolari contenenti un fascio di curve razionali il cui elemento generico sia irriducibile e non singolare.

Teorema 1 (Teorema di Noether-Enriques)
Sia S una superficie proiettiva irriducibile e non singolare dotata di un fascio (razionale o irrazionale) la cui curva generica è irriducibile, non singolare e razionale, allora S è una superficie birazionalmente rigata.
Inoltre se Δ è la base del fascio, allora S è birazionalmente equivalente a $\mathbb{P}^1 \times \Delta$. In particolare se il fascio è lineare, S è razionale.

La prima formulazione, dovuta a Noether [1], riguardava esclusivamente i fasci razionali; il teorema costituiva allora un vero e proprio criterio per la razionalità in quanto stabiliva che una superficie soddisfacente le ipotesi era birazionalmente isomorfa al prodotto $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; solo più tardi Enriques [2] estese la dimostrazione alle superfici con fasci irrazionali, cioè parametrizzati da una curva Δ, non isomorfa a $\mathbb{P}^1$. La dimostrazione esposta in questa tesi non ricalca il metodo seguito da Conforto (vd. [?] pag. 241-268), il quale affronta i due casi separamente, ma, utilizzando strumenti della geometria algebrica più moderni, fornisce una trattazione più generale e lineare.
Il lemma di Tsen riveste un ruolo chiave nell'ambito della dimostrazione in quanto assicura l'esistenza di una curva razionale unisecante le curve del fascio contenuto, per ipotesi, sulla superficie; questo ci permette di costruire una sezione dell'applicazione che parametrizza il fascio e di risalire così ad un isomorfismo razionale tra la superficie e $\mathbb{P}^1 \times \Delta$.
In realtà il risultato di Tsen non riguarda solamente i fasci di curve ma, limitando esclusivamente la dimensione del sistema (∞^1), è applicabile ad un fascio di varietà di dimensione e grado qualsiasi, purché queste grandezze soddisfino una data disequazione.
Viene perciò analizzata un'ipersuperficie di $\mathbb{P}^4$ contenente un fascio di quadriche e, supponendo di poter passare dal risultato algebrico a quello geometrico con argomentazioni simili a quelle fatte per il teorema di N-E, se ne è dedotta la razionalità.
In appendice al secondo capitolo viene trattato un *teorema di B. Segre* (1955) che fornisce una generalizzazione del lemma di Tsen; il risultato viene infatti esteso a sistemi ∞^d ($d \geq 1$) di varietà, scomparendo così anche la limitazione ai fasci ($d = 1$), per i quali, sotto ipotesi opportune, si attesta l'esistenza di una varietà unisecante di dimensione d.

Nel terzo capitolo vengono esaminate alcune tra le superfici razionali classiche più importanti come la quadrica e la cubica non singolari in $\mathbb{P}^3$ e le superfici di del Pezzo; di ognuna di esse viene dimostrata la razionalità

[1] "Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzer", Math.Ann., 3 (1871) 161-227.

[2] "Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali", Math.Ann., 52 (1899) 449-456.

tramite l'utilizzo di differenti metodi. In linea di massima si è cercato di utilizzare il criterio fornito dal teorema di N-E dimostrando l'esistenza di un fascio razionale di curve razionali sulla superficie; a tale scopo sono state spesso utilizzate le proiezioni da un punto interno o esterno alla superficie, a seconda dei casi, per sfruttare l'esistenza di tali fasci su superfici note. In ultima analisi si è fornita una rappresentazione piana delle superfici esaminate come prova dell'esistenza di siffatte superfici e come ulteriore studio della razionalità.

La *quadrica* viene definita a partire dall'immersione di Segre di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^3$, per cui risulta evidente l'equivalenza birazionale con il piano proiettivo; si passa quindi all'esame della sua struttura come superficie rigata contenente due fasci di rette $\{M_t\}$ ed $\{L_u\}$, con $t, u \in \mathbb{P}^1$, la cui esistenza, se dedotta a partire dall'equazione della superficie, implica per il teorema di N-E la razionalità della quadrica. In secondo luogo viene dimostrato che la quadrica non singolare di $\mathbb{P}^3$ è il modello proiettivo del sistema lineare costituito da ∞^3 coniche piane passanti per due punti base.

Per la superficie *cubica* non singolare la razionalità è stata dapprima provata dimostrando l'esistenza su di essa di un fascio di coniche corrispondenti alle sezioni piane passanti per una retta r, costruita in precedenza, appartenente alla superficie. La seconda verifica è stata fatta tramite i sistemi lineari provando che un sistema lineare completo di cubiche piane per sei punti fissati in posizione generale ha per modello proiettivo una superficie irriducibile e non singolare di terzo grado in $\mathbb{P}^3$ e che, viceversa, ogni cubica non singolare ed irriducibile dello spazio ordinario può essere rappresentata sul piano da un siffatto sistema; questa osservazione ci ha permesso di evidenziare la particolarità della cubica, nota anche come *superficie di del Pezzo di terzo grado*, di possedere 27 rette.

Il terzo paragrafo di questo capitolo riguarda le *superfici di grado minimo*, dove con questo termine vengono indicate quelle superfici irriducibili e non degeneri di grado $n-1$ in $\mathbb{P}^n$ (grado minimo per possedere tali proprietà). Tramite il *teorema di del Pezzo* viene fornita una classificazione che le divide in coni, rigate non singolari oppure le identifica con la superficie di Veronese. Avendo evidenziato alcune caratteristiche della struttura, si è data una dimostrazione dell'esistenza di tali superfici costruendole nello spazio proiettivo e fornendone delle equazioni rappresentative. Infine si è fornita la rappresentazione piana.

Si è operato in modo analogo per l'analisi delle superfici di grado n irriducibili e non degeneri in $\mathbb{P}^n$ tra cui sono state messe in evidenza quelle che da loro $n-3$ punti generici si proiettano sulla cubica non sigolare di $\mathbb{P}^3$, conosciute come *superfici di del Pezzo di grado n*.

Nell'ultimo paragrafo viene esaminato un risultato che Severi pubblicò nel 1901 (cfr. [**?**]), noto appunto come *Teorema di Severi*, secondo cui l'unica superficie di $\mathbb{P}^5$ proiettabile, cioè tale che la sua varietà delle secanti abbia dimensione $m \leq 4$, è la superficie di Veronese. Le superfici proiettabili e le proprietà degli spazi tangenti correlati sono state ultimamente oggetto di studio di F.L. Zak che, riprendendo alcuni studi di R.Hartshorne, nel 1981 ha dimostrato la seconda delle due congetture da quest'ultimo formulate.

In ultima analisi si è studiata la superficie di Steiner come risultato della proiezione della superficie di Veronese da una retta ad essa esterna.

Bibliografia

[A-M] Atiyah M.F., Macdonald I.G., *Introduzione all'Algebra Commutativa* , trad. di Maroscia P., Feltrinelli Editore, Milano 1981.

[B] Beauville A., *Complex Algebraic Surfaces* , London Math. Soc., Cambridge 1996. pp.1–54.

[Be] Bertini E., *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* , G. Principato Editore, Messina 1923.

[C] Conforto F., *Le Superfici Razionali* , Zanichelli, Bologna 1939.

[dP] del Pezzo P., *Sulle superficie dell' n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni* , Rend. Circ. Mat. di Palermo **1**, (1887) 241–271.

[F-R] Fujita T., Roberts J., *Varieties with small secant varieties: the extremal case* , Amer. J. Math. **103**, (1981) no.5 953–976.

[H] Harris J., *Algebraic Geometry. A First Course* , Springer-Verlag, New York 1992.

[Ha] Hartshorne R., *Algebraic Geometry* , Springer-Verlag, Heidelberg 1993.

[He] Herstein I.N., *Algebra* , Editori Riuniti, Roma 1992.

[K] Kempf G.R., *Algebraic varieties* , Cambridge University Press, Cambridge 1993.

[L-V] Lazarsfeld R., Van de Ven A., *Topics in the Geometry of Projective Space. Recent work of F.L. Zak* , DMV Seminar 4, Birkhäuser, Basel 1984.

[Mu] Mumford D., *Lectures on curves on an algebraic surface* , Princeton University Press, Princeton 1966.

[S] Sernesi E., *Geometria I* , Bollati-Boringhieri, Torino 1990.

[S1] Sernesi E., *Appunti del corso di geometria Algebrica (a.a. 1991/92)*

[Se] Severi F., *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti* , Rend. Circ. Mat. di Palermo **15**, (1901) 33–51.

[Sh1] Shafarevich I. R., *Basic Algebraic Geometry.Varieties in Projective Space* , Springer-Verlag, Heidelberg 1994.

[Sh2] Shafarevich I. R., *Basic Algebraic Geometry. Schemes and Varieties*, Springer-Verlag, Heidelberg 1994.